N° d'ordre 96

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ D'AIX - MARSEILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

ROGER BOUDET

Première THÈSE

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES
DES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES
DES SURFACES

Deuxième THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

SOUTENUES LE 30 juin 1961 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. P. VINCENSINI, *Président*

F. NAHON
F. BOREL
Th. VOGEL
} *Examinateurs*

N° d'ordre 96

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'AIX - MARSEILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

ROGER BOUDET

Première THÈSE

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES
DES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES
DES SURFACES

Deuxième THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

SOUTENUES LE 30 juin 1961 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. P. VINCENSINI, *Président*
F. NAHON
F. BOREL
Th. VOGEL
Examinateurs

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

FACULTE DES SCIENCES DE MARSEILLE

Mort au Champ d'Honneur, M. F. MARTY,
Maître de conférences de Mathématiques (14 Juin 1940)

Doyens honoraires : MM. MARCHAUD, TRAYNARD, CORROY, CHOUX.

Professeurs honoraires : MM. J. MARCHAUD, E. TRAYNARD, J. PERES, G. PETIT, R. THIRY, J. BOSLER, A. TIAN, L. MARGAILLAN, P. BENOIT.

Doyen : M. P. ROUARD *Assesseur* : M. P. CHOUX

Secrétaire Principal : M. C. MOYNAULT.

PROFESSEURS

MM.	G. CORROY	Géologie et minéralogie
	P. CHOUX	Botanique
	R. CERIGHELLI	Agronomie tropicale
	J. VALENSI	Mécanique expérimentale des fluides
	P. ROUARD	Physique générale
	H. PRAT	Botanique
	P. DESNUELLE	Chimie biologique
	M. ABELOOS	Biologie générale
	R. MERIGOUX	Physique industrielle
	P. VINCENSINI	Calcul différentiel et intégral
	E. CALVET	Chimie générale
	C. FEHRENBACH	Astronomie
	A. FAVRE	Mécanique statistique de l'Atmosphère
	A. GUILLEMONAT	Chimie industrielle
	J.M. PERES	Océanographie biologique
	G. CARPENI	Chimie M.P.C.
	C. JAUSSERAN	Physique M.P.C.
	R. MOLINIER	Biologie végétale
	Y. DOUCET	Physique M.P.C.
	J.M. SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique
	P. COTTON	Electronique
	J. METZGER	Chimie S.P.C.N.
	J. TIMON-DAVID	Zoologie
	L. FOURES	Mathématiques
	D. MALE	Physique
	G. BODIOU	Mathématiques appliquées
	M. NAUDET	Chimie des corps gras
	F. NAHON	Mathématiques
	J. PAILLARD	Psycho-physiologie
	L. SAVIDAN	Chimie systématique
	D. KASTLER	Physique théorique
	P. BOUSQUET	Physique S.P.C.N.
	P. PESTEIL	Physique P.C.B.
	G. LIANDRAT	Physique (Institut de Nice)

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. C. GOUVERNET	Géologie appliquée
C. CLARION (Mlle)	Mécanique des fluides
R. AMAR	Biologie animale P.C.B.
A. JULG	Chimie théorique
S. WACHS	Mathématiques générales (Institut de Nice)
J. CHOUTEAU	Physiologie animale

MAITRES DE CONFERENCES

MM. A. VISCONTI	Physique théorique
J. LEFEBVRE	Chimie M.P.C.
L. DEVEZE	Biologie marine
S. TAXY (Mme)	Géologie historique
A. BLANCHARD	Mathématiques générales
M.L. FURNESTIN (Mme)	Biologie animale
M. BERTRAND	Chimie S.P.C.N.
J. TROMPETTE	Physique S.P.C.N.
R. MONIER	Chimie biologique
M. LAFFITTE	Chimie M.P.C.
L. SIDERIADES	Dynamique des vibrations
J. MANDELBROJT	Physique nucléaire
F. BOREL	Mathématiques
J. BLANC	Géologie marine
M. DUSSARDIER	Physiologie animale
R. CHANDEBOIS (Mlle)	Biologie animale

CHARGES DE CONFERENCES

MM. P. BENOIT	Physiologie
J. MORIN	Neurophysiologie
B. GOUZON	Physiologie
V. CHARLIER DE CHILLY	Mathématiques
H. GAVINI (Melle)	Psycho-physiologie
P. JEAN	Physique
J. SENEZ	Chimie biologique
M. COTTON (Mme)	Mathématiques
H. GASTAUT	Neurophysiologie
M. BEZAGUET	Chimie
S. GUEIRARD (Mlle)	Pétrographie
L. COHEN-SOLAL	Physique
R. MOLINIER	Biologie végétale
J. RICARD	Physiologie végétale
D. SCHACHTER (Mme)	Ecologie terrestre et limnique
L. GAFFIER	Botanique
LAGARDE (Mlle)	Chimie générale
CATZIGRAS (Mlle)	Géologie)
MATTEI (Mme)	Botanique

A MA MÈRE

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547028_0055

A Monsieur Paul VINCENSINI

Hommage respectueux et reconnaissant

AVANT-PROPOS

Qu'il me soit permis d'exprimer ma reconnaissance à M. le Professeur P. VINCENSINI pour ses conseils et les encouragements donnés à ce travail, d'adresser mes remerciements à MM. les Professeurs F. NAHON et F. BOREL pour leur bienveillance et l'intérêt avec lequel ils l'ont accueilli, et de remercier M. Th. VOGEL, Directeur du Centre de Recherches Scientifiques, Industrielles et Maritimes de Marseille, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de faire partie du Jury.

INTRODUCTION

Soient (S) une surface de l'espace euclidien ordinaire E^3 et $\vec{V}$ un vecteur de cet espace, lié au point courant M de (S) et fonction continue de ce point.

$O\vec{M} = \vec{M}(u,v)$, où O est un point fixe de l'espace, étant le vecteur de position du point M de (S), $\vec{V}$ sera une fonction des deux variables u et v, définissant M sur (S). Les deux fonctions $\vec{M}(u,v)$ et $\vec{V}(u,v)$ seront supposées pourvues de dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre nécessaire pour justifier les calculs qui seront effectués par la suite.

Menons par O un vecteur $\overrightarrow{OV}$ équipollent au vecteur $\vec{V}$. Lorsque M décrit (S), le point V décrit en général une surface (S'), hodographe des vecteurs du champ précédemment défini, et les différents couples (M, V), définissent une correspondance ponctuelle entre (S) et (S'), deux points homologues quelconques répondant aux mêmes valeurs des paramètres u et v. Exceptionnellement, (S') pourra se réduire à une courbe ou à un point.

Désignons par (M, $\vec{V}$), la transformation qui remplace tout point $M(u,v)$ de (S) par le point $M_1(u,v)$ tel que, ε étant une constante infinitésimale (dont le carré sera négligé), on ait

$$M_1(u,v) = M(u,v) + \varepsilon\vec{V}(u,v). \tag{1}$$

une telle transformation sera dite transformation infinitésimale de (S).

Il sera commode dans la suite, de regarder $\vec{V}$ comme un vecteur vitesse (le vecteur vitesse de la transformation infinitésimale), ε étant alors assimilé à un temps.

L'objet du présent travail est l'étude des transformations infinitésimales $(\vec{M}, \vec{V})$, à partir de deux vecteurs et de deux scalaires invariants, définis, en chaque point M de la surface (S) de la manière suivante :

Le premier vecteur, introduit par BURALI-FORTI[1] dans son étude de la restriction aux surfaces du champ d'application des homographies vectorielles, est le *tourbillon*, ou *demi-rotationnel*, de la transformation.

Le deuxième vecteur, que nous avons appelé dans notre étude le vecteur de *variation superficielle*, est défini comme il suit :

Soient

$$\vec{n} = \vec{M}_u \wedge \vec{M}_v \quad \text{et} \quad \vec{n}_1 = \vec{M}_{1u} \wedge \vec{M}_{1v}$$

les deux vecteurs représentant (au même facteur $dudv$ près), en grandeur et en direction, un élément superficiel infinitésimal de (S), et son homologue sur la surface (S_1) (lieu de M_1) transformée infinitésimale de (S).

On tire de la relation (1)

$$\vec{M}_{1u} \wedge \vec{M}_{1v} = \vec{M}_u \wedge \vec{M}_v + \varepsilon (\vec{M}_u \wedge \vec{V}_v + \vec{V}_u \wedge \vec{M}_v)$$

soit

$$\vec{n}_1 = \vec{n} + \varepsilon (\vec{M}_u \wedge \vec{V}_v + \vec{V}_u \wedge \vec{M}_v) ;$$

le vecteur de variation superficielle est le quotient, par le module H du vecteur $\vec{n}$, du cœfficient de ε dans la relation ci-dessus. Il représente la variation, dans la transformation infinitésimale $(M, \vec{V})$, de l'élément superficiel de (S) entourant le point M, cette variation étant rapportée à l'unité d'aire.

Les deux scalaires dont il a été question sont les mesures des projections orthogonales respectives des vecteurs précédemment définis sur la normale en M à (S). Ils sont égaux :

- le premier, à la moyenne des rotations que subissent au cours de la transformation, dans le plan tangent en M à (S), les directions des différents éléments linéaires de (S) issus du point M ;

(1) *"Gradient, divergence et rotationnel dans une surface"*. Atti delle R. Accademia delle Scienze di Torino, Tome XLV, 1909-1910 (p. 388-400).

M.G. BOULIGAND, dans son ouvrage *"Les principes de l'analyse géométrique"*, a fondé l'étude métrique des surfaces sur les propriétés des champs scalaires et vectoriels et des opérations infinitésimales vectorielles qui s'y rattachent (voir particulièrement le tome I de l'ouvrage).

- le second, à la dilatation, rapportée à l'unité d'aire, de l'aire de l'élément de surface de (S) au point M. Ce second scalaire est désigné par BURALI-FORTI sous le nom de *divergence* du vecteur $\vec{V}$ sur la surface (S).

Certains auteurs[1] le désignent plus particulièrement ainsi dans le cas où $\vec{V}$ est situé dans le plan tangent en M à (S).

L'étude est divisée en trois parties.

La première procède du point de vue suivant, déjà adopté dans un mémoire de M.H. PAILLOUX[2] :

O étant un point fixe de l'espace, la donnée d'une correspondance entre les points M et V de deux surfaces (S) et (S'), détermine deux champs de vecteurs : le champ des vecteurs

$$\vec{V} \equiv \vec{MV} = \vec{OV},$$

définis sur la surface (S), et le champ, réciproque du premier, des vecteurs

$$\vec{M} \equiv \vec{VM} = \vec{OM},$$

définis sur la surface (S'). La première partie de ce travail est consacrée à la démonstration de relations établissant des liens étroits entre l'étude de la transformation infinitésimale (M, $\vec{V}$) et celle de sa réciproque (V, $\vec{M}$).

La deuxième partie traite des transformations infinitésimales de la sphère. La mise à profit de certains travaux de M.P. VINCENSINI, montre les liens que le sujet présente avec les congruences rectilignes. Les problèmes de la détermination de toutes les transformations infinitésimales de la sphère, pour lesquelles le vecteur vitesse est en chaque point égal au demi vecteur, ou au vecteur, de variation superficielle y sont en particulier, complètement résolus.

La troisième partie est l'extension aux surfaces quelconques, de certains des résultats de la partie précédente. L'étude du problème, bien connu, de la détermination des transformations infinitésimales d'une surface en elle-même, telles que l'un ou l'autre des deux scalaires précédemment considérés soit nul en chaque point, est complétée par l'étude de deux autres familles intéressantes de transformations, à savoir les transformations pour lesquelles la direction de la vitesse est direction principale de dilatation linéaire ou de rotation, puis par celles des transformations qui appartiennent à la fois à deux quelconques des quatre familles ainsi obtenues.

(1) Voir par exemple le *"Cours de Géométrie différentielle locale"* J. FAVARD. Paris 1957.

(2) *"Mouvements fluides entraînant une famille de surfaces inextensibles"* Bull. des Sc. Math. 1939 (p. 329-353)

PREMIERE PARTIE

I. - Rappel de quelques propriétés des transformations infinitésimales des surfaces

1. Soit $(M, \vec{V})$ une transformation infinitésimale quelconque de la surface (S).

Considérons, au point M, l'élément linéaire

$$d\vec{M} = \vec{M}_u du + \vec{M}_v dv$$

de (S) correspondant au couple de valeurs du, dv des accroissements infinitésimaux des variables u et v, et soit

$$d\vec{V} = \vec{V}_u du + \vec{V}_v dv$$

la variation que subit le vecteur vitesse $\vec{V}$ quand on passe du point M au point infiniment voisin, $M+d\vec{M}$.

Posons :

$$a = \vec{M}_u \cdot \vec{V}_u, \qquad b' = \vec{M}_u \cdot \vec{V}_v, \qquad b'' = \vec{M}_v \cdot \vec{V}_u, \qquad c = \vec{M}_v \cdot \vec{V}_v$$

et

$$2b = b' + b''.$$

Le produit scalaire des vecteurs $d\vec{M}$ et $d\vec{V}$ est la forme quadratique

$$d\vec{M} \cdot d\vec{V} = a du^2 + 2b du dv + c dv^2,$$

qui définit la dilatation (ou la contraction) dans la transformation de (S) du module $ds = \sqrt{d\vec{M}^2}$ de l'élément linéaire $d\vec{M}$, et que l'on peut aussi regarder comme la demi-variation du carré de ds.

De la forme précédente on déduit une indicatrice des dilatations linéaires en portant, à partir de M, sur chaque direction Mt du plan tangent en M à (S), un segment égal à la racine carrée de l'inverse de la dilatation (rapportée à l'unitée de longueur),

$$\lambda = \frac{d\vec{M}}{ds} \cdot \frac{d\vec{V}}{ds},$$

de l'élément linéaire de (S) porté par Mt.

Cette indicatrice est une conique dont les axes définissent les directions principales de dilatation linéaire. On sait que la condition

nécessaire et suffisante pour que l'angle de deux directions orthogonales du plan tangent de (S) ne se déforme pas dans la transformation, est que ces deux directions soient des directions conjuguées de cette conique, et que, par suite, si l'on excepte le cas ou la transformation $(M, \vec{V})$ est conforme (pour lequel l'indicatrice est un cercle), l'angle formé par les axes de celle-ci est le seul angle droit du plan tangent de (S) à déformation nulle.

La valeur moyenne de λ lorsque l'angle θ de Mt avec une direction arbitraire du plan tangent varie de 0 à 2π, est, on le sait, égal à la demi-dilatation, $\frac{\sigma}{2}$, de l'aire de l'élément superficiel de (S), rapportée à l'unité d'aire. Désignons par $\delta\theta$ l'accroissement infinitésimal de θ dans le plan tangent. On a :

$$\frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\vec{M}}{ds}\cdot\frac{d\vec{V}}{ds}\delta\theta .$$

Rappelons les diverses formes que l'on peut donner à l'expression de la dilatation superficielle σ.

Posant

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

$$H = \sqrt{EG - F^2}, \qquad \vec{n} = \vec{M}_u \wedge \vec{M}_v \qquad \text{et} \qquad \vec{N} = \frac{\vec{n}}{H},$$

on a

$$\sigma = \frac{1}{H^2}(Ga - 2Fb + Ec).$$

Sous la forme

$$\frac{1}{H}(\vec{N}\wedge\vec{M}_u \cdot \vec{V}_v + \vec{M}_v \wedge \vec{N}\cdot\vec{V}_u),$$

σ est la divergence du vecteur $\vec{V}$ sur la surface (S). On a encore

$$\sigma = \frac{d\vec{M}}{ds}\cdot\frac{d\vec{V}}{ds} + \frac{\delta\vec{M}}{\delta s}\cdot\frac{\delta\vec{V}}{\delta s},$$

où $d\vec{M}$ et $\delta\vec{M}$ sont deux éléments linéaires orthogonaux de (S) issus de M. Enfin, si l'on désigne par $\vec{U}$ le vecteur

$$\vec{U} = \frac{\vec{u}}{H}$$

où

$$\vec{u} = \vec{M}_u \wedge \vec{V}_v + \vec{V}_u \wedge \vec{M}_v$$

est la variation, dans la transformation, du vecteur

$$\vec{n} = \vec{M}_u \wedge \vec{M}_v$$

on a

$$\sigma = \vec{U}\cdot\vec{N}.$$

2. Soit

$$d\vec{M}\wedge d\vec{V}=\vec{p}\,du^2+2\vec{q}\,du\,dv+\vec{r}\,dv^2,$$

où $\vec{p}=\vec{M}_u\wedge\vec{V}_u$, $\vec{q}'=\vec{M}_u\wedge\vec{V}_v$, $\vec{q}''=\vec{M}_v\wedge\vec{V}_u$, $\vec{r}=\vec{M}_v\wedge\vec{V}_v$

et $$2\vec{q}=\vec{q}'+\vec{q}'',$$

l'expression vectorielle qui, multipliée par $\frac{1}{2}$, définit en grandeur et direction la portion d'espace balayée par l'élément $d\vec{M}$ au cours de la transformation.

La valeur moyenne du vecteur

$$\frac{d\vec{M}}{ds}\wedge\frac{d\vec{V}}{ds}$$

lorsque l'angle θ de la direction Mt de $d\vec{M}$ avec une direction arbitraire du plan tangent en M à (S) varie de 0 à 2π, est le tourbillon $\vec{T}$ de la transformation infinitésimale de (S), ou encore le demi-rotationnel du vecteur $\vec{V}$ sur la surface (S) :

$$\vec{T}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\vec{M}}{ds}\wedge\frac{d\vec{V}}{ds}\delta\theta$$

Utilisant les mêmes notations que précédemment, on a

$$2\vec{T}=\frac{1}{H^2}(G\vec{p}-2F\vec{q}+E\vec{r})$$

$$=\frac{2\vec{t}}{H}\qquad \text{où}\quad 2\vec{t}=(N\wedge\vec{M}_u)\wedge\vec{V}_v+\vec{V}_u\wedge(\vec{N}\wedge\vec{M}_v)$$

$$=\frac{d\vec{M}}{ds}\wedge\frac{d\vec{V}}{ds}+\frac{\delta\vec{M}}{\delta s}\wedge\frac{\delta\vec{V}}{\delta s},$$

et enfin, en posant

$$\bar{\omega}=\frac{1}{2}(b''-b')\quad\text{et}\quad\omega=\frac{\bar{\omega}}{H},$$

$$2\vec{T}=2\omega\vec{N}+N\wedge\vec{U}$$

Le nom de rotationnel sur une surface, donné au vecteur $2\vec{T}$ par BURALI-FORTI, est susceptible de la justification suivante.

Supposons le champ des vecteurs $\vec{V}(u,v)$ définis sur la surface (S), comme appartenant à un champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z)$ définis dans l'espace

euclidien E^3. Faisons subir au point d'application du vecteur $\vec{V}(x,y,z)$, à partir du point M de la surface (S) et sur la normale à celle-ci, un déplacement infiniment petit d'amplitude dl. Soit $\vec{\nu}dl$ la variation correspondante de $\vec{V}$. On peut exprimer, dans l'espace E^3, le rotationnel de $\vec{V}$ au point M sous la forme

$$\overrightarrow{rot\,V}=\frac{d\vec{M}}{ds}\wedge\frac{d\vec{V}}{ds}+\frac{\delta\vec{M}}{\delta s}\wedge\frac{\delta\vec{V}}{\delta s}+\vec{N}\wedge\vec{\nu},$$

où $d\vec{M}$ et $\delta\vec{M}$ sont deux éléments linéaires orthogonaux de (S) issus de M; on a donc

$$\overrightarrow{rot\,\vec{V}}=2\vec{T}+\vec{N}\wedge\vec{\nu}. \qquad (1)$$

Le vecteur $2\vec{T}$, défini sur (S), est donc égal au rotationnel du mouvement d'un milieu à trois dimensions, dans lequel la variation de la vitesse $\vec{V}$ le long de la normale N à (S) serait, dans une région infiniment voisine de la surface (S), ou nulle ou colinéaire à $\vec{N}$.

Dans ce sens, nous dirons de la transformation infinitésimale d'une surface, pour laquelle le vecteur $2\vec{T}$ est nul qu'elle est irrotationnelle.

La formule précédente mise sous la forme

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{rot\,\vec{V}}=\omega\vec{N}+\vec{N}\wedge\frac{\vec{\nu}+\vec{U}}{2}$$

fait intervenir dans l'expression du tourbillon de $\vec{V}(x,y,z)$ la demi-somme des déplacements (rapportés à l'unité de longueur) $\vec{\nu}$ et $\vec{U}$, pendant l'intervalle ε, du point matériel du milieu en mouvement situé sur la normale à la surface (S) à une distance infiniment voisine de celle-ci, et du point géométrique, initialement confondu avec ce point matériel, mais fixe sur la normale à (S) au cours de la transformation.

Cette formule montre par ailleurs que, quel que soit le mouvement de l'espace à trois dimensions auquel peut appartenir une transformation infinitésimale donnée de la surface (S), le flux de son tourbillon à travers (S) est le même que le flux du vecteur $\vec{T}$ de cette transformation. Cette remarque justifie le terme de surface de tourbillon que nous emploierons pour toute surface affectée d'une transformation dont le vecteur $\vec{T}$ est dans le plan tangent.

La projection orthogonale du vecteur

$$\frac{d\vec{M}\wedge d\vec{V}}{ds\,.\,ds}$$

sur la normale à (S) est égale à la rotation dans le plan tangent de la droite Mt support de $d\vec{M}$.

Les axes de la conique indicatrice obtenue en portant sur chaque direction Mt un segment égal à l'inverse de

$$\rho = \vec{N} \wedge \frac{d\vec{M}}{ds} \cdot \frac{d\vec{V}}{ds}$$

définissent les directions principales de rotation dans le plan tangent.

On sait que le réseau des lignes tangentes en chaque point à ces directions est bissecteur du réseau des lignes tangentes en chaque point aux directions principales de dilatation linéaire.

La valeur moyenne de ρ est la rotation moyenne dans le plan tangent. Elle est égale au flux ω du vecteur $\vec{T}$ à travers l'élément d'aire unité de (S).

3. On peut lier entre elles les expressions des grandeurs précédemment définies en notant $\{N, f\}$ l'opération qui consiste à substituer $\vec{N} \wedge \vec{M}_u$ et $\vec{N} \wedge \vec{M}_v$ respectivement à $\vec{M}_u$ et $\vec{M}_v$ dans toute expression f fonction de ces vecteurs.

On a alors

$$2\omega = \{\vec{N}, \sigma\},$$

$$\sigma = -\{\vec{N}, 2\omega\},$$

$$2\vec{T} = \{\vec{N}, \vec{U}\},$$

$$\vec{U} = -\{\vec{N}, 2\vec{T}\}.$$

Par suite, de l'expression de $2\vec{T}$

$$2\vec{T} = 2\omega\vec{N} + \vec{N} \wedge \vec{U},$$

on déduit l'expression de $\vec{U}$:

$$\vec{U} = \sigma\vec{N} - \vec{N} \wedge 2\vec{T}.$$

La projection orthogonale de $2\vec{T}$ sur le plan tangent à (S) se déduit donc de celle de $\vec{U}$ par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de la normale orientée.

On a enfin les relations :

$$\vec{T} \cdot \vec{U} = \omega\sigma$$

$$4\vec{T}^2 - \vec{U}^2 = 4\omega^2 - \sigma^2$$

II. - Transformation infinitésimale des familles de surfaces minima associées

4. On peut donner à l'opération $\{N, f\}$ définie au n° 3, un sens intégral en supposant que $\vec{N} \wedge d\vec{M}$ est une différentielle totale, c'est-à-dire que (S) est une surface minima.

(S) étant une surface minima quelconque, considérons une de ses ∞^1 surfaces associées. Soit (S_α) cette surface, α étant l'angle dont tourne tout élément linéaire dM de (S), dans la déformation continue qui amène les points M de (S) sur leurs correspondants M_α de (S_α).

On a, par définition de (S_α) :

$$d\vec{M}_\alpha = \vec{N} \wedge d\vec{M} \sin\alpha + d\vec{M} \cos\alpha .$$

Soit maintenant une transformation infinitésimale quelconque (M, $\vec{V}$) de (S), et considérons la transformation infinitésimale (M_α, $\vec{V}$) de son associée (S_α), dans laquelle le point M_α est animé de la même vitesse, $\vec{V}$, que son homologue M.

Affectons de l'indice α les éléments de la transformation (M_α, $\vec{V}$).

On a

$$\vec{u}_\alpha = (\vec{N} \wedge \vec{M}_u \sin\alpha + \vec{M}_u \cos\alpha) \wedge \vec{V}_v + \vec{V}_u \wedge (\vec{N} \wedge \vec{M}_v \sin\alpha + \vec{M}_v \cos\alpha)$$

$$= 2\vec{t} \sin\alpha + \vec{u} \cos\alpha .$$

Comme aux points correspondants de toutes les surfaces associées (S_α), le vecteur $\vec{n}_\alpha$ a même direction, $\vec{N}$, et même module, H, on a

$$\vec{U}_\alpha = 2\vec{T} \sin\alpha + \vec{U} \cos\alpha ,$$

$$\sigma_\alpha = 2\omega \sin\alpha + \sigma \cos\alpha ;$$

de même,

$$2\vec{T}_\alpha = 2\vec{T} \cos\alpha - \vec{U} \sin\alpha ,$$

$$2\omega_\alpha = 2\omega \cos\alpha - \sigma \sin\alpha .$$

Considérons la surface associée (S_β) (où $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$), adjointe d'O. BONNET de (S_α). Les formules ci-dessus nous montrent que

$$2\vec{T}_\alpha = \vec{U}_\beta \quad , \quad 2\omega_\alpha = \sigma_\beta .$$

Par suite :

Si deux surfaces minima adjointes d'O. BONNET l'une de l'autre sont soumises à des transformations infinitésimales de même hodographe, le tourbillon $\vec{T}$ et la rotation moyenne ω de la transformation de l'une

des deux surfaces, sont respectivement égaux au demi-vecteur $\frac{\vec{U}}{2}$ de variation superficielle et au demi-scalaire $\frac{\sigma}{2}$ de dilatation superficielle de la transformation de l'autre.

En particulier si $\vec{T}_\alpha$ est nul, il en est de même de $\vec{U}_\beta$, et réciproquement.

L'on peut déduire de cette propriété une méthode pour déterminer toutes les transformations infinitésimales irrotationnelles d'une surface minima quelconque.

Il existe en effet une méthode (sur laquelle nous reviendrons au n° 12) pour déterminer toutes les transformations infinitésimales des points P d'une surface quelconque, (P), pour lesquelles le vecteur $\vec{U}$ de la transformation est nul. Il suffit pour cela de déterminer toutes les déformations (isométriques) infinitésimales $(P,\vec{W})$ de (P). Dans une déformation infinitésimale de (P), tous les trièdres géodésiques de (P) au point P, ont même rotation $\vec{\Omega}$. Le vecteur $\vec{\Omega}\wedge d\vec{P}$, égal à $d\vec{W}$, est une différentielle totale, ce qui exige.

$$\vec{\Omega}_u \wedge \vec{P}_v + \vec{P}_u \wedge \vec{\Omega}_v = 0$$

et dès lors, pour réaliser la nullité de la variation superficielle, $\vec{U}$, il suffit de soumettre (P) à une transformation de vitesse $\vec{\Omega}$.

Par suite :

La transformation infinitésimale irrotationnelle la plus générale d'une surface minima quelconque (S), s'obtient en prenant pour vitesse le vecteur de rotation du trièdre géodésique dans la déformation infinitésimale la plus générale de la surface adjointe d'O. BONNET de (S).

On peut rattacher aux formules établies au début de ce numéro deux propriétés d'invariance. On a en effet pour toute transformation infinitésimale $(M_\alpha, \vec{V})$:

$$\sigma_\alpha^2 + 4\omega_\alpha^2 = \sigma^2 + 4\omega^2 ,$$

$$\vec{T}_\alpha \wedge \vec{U}_\alpha = \vec{T} \wedge \vec{U}$$

D'autre part, en posant $2\frac{\omega}{\sigma} = \operatorname{tg}\psi$, on obtient

$$\omega_\alpha = \sigma \frac{\sin(\psi - \alpha)}{2\cos\psi} .$$

Supposons le rapport $2\frac{\omega}{\sigma}$ constant (indépendant du point M) et considérons la surface minima (S_ψ). La relation ci-dessus montre que la transformation $(M_\psi, \vec{V})$ est à rotation moyenne nulle. On peut dire aussi:

Si dans l'ensemble des transformations infinitésimales de même hodographe affectant une famille de ∞^1 surfaces minima associées (S_α),

il y en a une, $(M_{\alpha_0}, \vec{V})$, à rotation moyenne nulle, toutes les autres sont telles que le rapport du double de la rotation moyenne à la dilatation superficielle est constant et égal à la tangente de l'angle $\alpha-\alpha_0$ qui fait passer les éléments linéaires de (S_{α_0}) à ceux de (S_α).

III. – Analyse vectorielle réciproque

5. Considérons dans l'espace euclidien E^n deux variétés (S) et (S') en correspondance ponctuelle biunivoque et bicontinue. Soient M le point courant de (S), V son homologue de (S'), O un point quelconque de E^n.

Posant

$$\overrightarrow{OM} = \vec{M}, \qquad \overrightarrow{OV} = \vec{V}$$

nous désignerons par $(M,\vec{V})$ le champ des vecteurs $\vec{V}$ considérés comme appliqués aux points M de la variété (S) et par $(V,\vec{M})$ le champ des vecteurs M considérés comme appliqués aux points V de la variété (S').

Les vecteurs de chacun de ces champs sont des fonctions continues et uniformes des points de la variété à laquelle ils sont appliqués. Ils sont définis à une constante vectorielle près dépendant du choix du point O.

Nous dirons de la correspondance ponctuelle entre (S) et (S') qu'elle est associée à l'un ou l'autre de ces champs, ou de ceux-ci qu'ils sont associés à la correspondance entre (S) et (S'), et réciproques l'un de l'autre.

Quand les coordonnées cartésiennes, x'_i, des points V (ou les composantes des vecteurs $\vec{V}$) seront exprimées sous la forme de fonctions $x'_i = \mathbf{X}_i(x_j)$ des coordonnées x_j des points M, le champ $(V,\vec{M})$ sera appelé, plus précisément, champ inverse du champ $(M,\vec{V})$.

Considérons une correspondance biunivoque et bicontinue quelconque liant les points $M(u,v)$ et $V(u,v)$ de deux surfaces (S) et (S') de E^3.

Ecrivons les expressions des vecteurs et scalaires du premier ordre de la transformation infinitésimale $(V,\vec{M})$, réciproques des vecteurs et scalaires $\vec{U}$, ω, $\vec{T}$, σ de la transformation $(M,\vec{V})$.

Posant

$$d\vec{V}^2 = ds'^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2,$$

$$\vec{n}' = \vec{V}_u \wedge \vec{V}_v, \qquad H' = \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \qquad \vec{N}' = \frac{\vec{n}'}{H'},$$

on a

$$\vec{U}' = \frac{\vec{H}}{H'} = \frac{1}{H'}(\vec{V}_u \wedge \vec{M}_v + \vec{M}_u \wedge \vec{V}_v)$$

$$\omega' = \frac{1}{2H'}(\vec{V}_v \cdot \vec{M}_u - \vec{V}_u \cdot \vec{M}_v) = -\frac{\bar{\omega}}{H'}$$

$$\vec{T}' = -\frac{1}{2H'^2}(G_1\vec{p} - 2F_1\vec{q} + E_1\vec{r})$$

$$= \frac{\vec{t}'}{H'} = \frac{1}{2H'}\left[(\vec{N}' \wedge \vec{V}_u) \wedge \vec{V}_v + \vec{M}_u \wedge (\vec{N}' \wedge \vec{V}_v) \right]$$

$$\sigma' = \frac{1}{H'^2}(G_1 a - 2F_1 b + E_1 c)$$

$$= \frac{1}{H'}(\vec{N}' \wedge \vec{V}_u \cdot \vec{M}_v - \vec{N}' \wedge \vec{V}_v \cdot \vec{M}_u)$$

On peut remarquer que l'on a :

(1) $$\vec{U}H = \vec{u} = \vec{U}'H',$$

(2) $$\omega H + \omega' H' = 0.$$

La première relation s'interprète comme l'égalité de la variation $\vec{u}$ de l'élément superficiel (représenté par le vecteur $\vec{n}$) de module H de (S) dans la transformation $(M, \vec{V})$, et de la variation de l'élément correspondant de (S') dans la transformation réciproque $(V, \vec{M})$.

La seconde relation exprime la nullité de la somme du flux du tourbillon de la transformation $(M, \vec{V})$ à travers l'élément superficiel de (S) d'aire H (nous entendons par là un élément plan d'aire H, situé dans le plan tangent en M à (S)), et du tourbillon réciproque à travers l'élément correspondant de (S').

De cette dernière propriété, on peut rapprocher la suivante. Calculons le flux du vecteur $\vec{t}$, produit du tourbillon $\vec{T}$ de $(M, \vec{V})$ par l'aire H, à travers l'élément superficiel de (S') d'aire unité :

$$\vec{t}' \cdot \vec{N}' = \frac{1}{2}\left[(\vec{N} \wedge \vec{M}_u) \wedge \vec{V}_v \cdot \vec{N}' + \vec{V}_u \wedge (\vec{N} \wedge \vec{M}_v) \cdot \vec{N}' \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{N} \wedge \vec{M}_v \cdot \vec{N}' \wedge \vec{V}_u - \vec{N} \wedge \vec{M}_u \cdot \vec{N}' \wedge \vec{V}_v \right]$$

$$= -\vec{N} \cdot \vec{t}',$$

d'où

$$\vec{t} \cdot \vec{N}' + \vec{t}' \cdot \vec{N} = 0.$$

La somme du flux de $\vec{t}$ à travers l'élément superficiel d'aire unité de (S') et du flux de $\vec{t}'$ à travers l'élément superficiel d'aire unité de (S) est nulle.

Posons $\xi = \vec{t} \cdot \vec{N}' = -\vec{t}' \cdot \vec{N}.$

On a

$$\vec{t}' \wedge \vec{t} \cdot \vec{N} \wedge \vec{N}' = (\vec{t}' \cdot \vec{N})(\vec{t} \cdot \vec{N}') - (\vec{t} \cdot \vec{N})(\vec{t}' \cdot \vec{N})$$

soit

$$\vec{t} \wedge \vec{t}' \cdot \vec{N} \wedge \vec{N}' = \xi^2 - \bar{\omega}^2$$

Les propriétés des champs réciproques, définis sur les surfaces, exprimées par les relations (1) et (2), sont applicables aux champs définis dans l'espace E^3:

Soit E'^3 une représentation univoque et réciproque de E^3 dans lui-même, Soient (S) une surface à deux côtés, quelconque, de E^3, (C) une courbe fermée quelconque tracée sur (S), et (S') et (C') leurs homologues dans la correspondance qui lie les points M de E^3 aux points V de E'^3.

Remarquons que si (C) est décrite dans un sens donné (représenté dans les formulessuivantes par la notation $\overrightarrow{C}$)) correspondant à l'orientation de la normale n de (S), le sens homologue ($\overrightarrow{C'}$)) dans lequel (C') est décrite est celui qui correspond à l'orientation du vecteur $\vec{n}'$ homologue de $\vec{n}$. Désignant par $\overrightarrow{rot'M}$ le rotationnel du champ des vecteurs M appliqués aux points de E'^3, on déduit de la relation (2) du paragraphe précédent les relations suivantes :

$$\iint_S \overrightarrow{rotV}.\vec{n}\,du\,dv = \iint_{S \text{ ou } S'} \varpi\,du\,dv = -\iint_{S'} \overrightarrow{rot'M}.\vec{n}\,du\,dv,$$

ou encore

$$\int_{\overrightarrow{C}} \vec{V}.d\vec{M} + \int_{\overrightarrow{C'}} d\vec{V}.\vec{M} = 0. \qquad (3)$$

Par suite :

- La somme des flux respectifs des rotationnels de deux champs réciproques à travers toute portion de surface (à deux côtés) de E^3 et son homologue de E'^3 est nulle.

Il en est de même de la somme des circulations des vecteurs des deux champs sur toute courbe fermée (sans nœud) de E^3 et son homologue de E'^3.

- Si le rotationnel d'un champ est nul, il en est de même de celui du champ réciproque. Si le premier champ dérive d'un potentiel, il en est de même du second.

- Les surfaces de tourbillon de l'un et l'autre champs sont homologues dans la correspondance de E^3 et E'^3.

L'avant dernière proposition, par exemple, se vérifie aisément par l'analyse.

Supposons E^3 et E'^3 rapportés au même trièdre trirectangle $Oxyz$ et désignons par x,y,z et $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ les coordonnées respectives des points M et V.

Puisque la correspondance entre les points M et V est biunivoque, le jacobien

$$J = \frac{D(X,Y,Z)}{D(x,y,z)}$$

est différent de zéro et on peut calculer les dérivés partielles, par rapport aux variables X,Y,Z des fonctions inverses $x(X,Y,Z)$, $y(X,Y,Z)$, $z(X,Y,Z)$.

Calculons les composantes du rotationnel inverse :

$$\frac{\partial z}{\partial Y}-\frac{\partial y}{\partial Z}=\frac{1}{J}\left[\frac{D(Z,X)}{D(y,x)}-\frac{D(Y,X)}{D(z,x)}\right]=\frac{1}{J}\left[\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\right],$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z}-\frac{\partial z}{\partial X}=\frac{1}{J}\left[\frac{D(X,Y)}{D(z,y)}-\frac{D(Z,Y)}{D(x,y)}\right]=\frac{1}{J}\left[\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right],$$

$$\frac{\partial y}{\partial X}-\frac{\partial x}{\partial Y}=\frac{1}{J}\left[\frac{D(Y,Z)}{D(x,z)}-\frac{D(X,Z)}{D(y,z)}\right]=\frac{1}{J}\left[\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\right].$$

Comme le montrent les formules ci-dessus, l'annulation du rotationnel direct entraîne bien l'annulation du rotationnel inverse.

La relation (1) permet d'écrire :

$$\int_{C}\vec{M}\wedge\vec{V}=\iint_{S\ ou\ S'}\vec{u}\,du\,dv=\int_{C'}\vec{V}\wedge\vec{M},$$

d'où

$$\int_{C}d\vec{M}\wedge\vec{V}+\int_{C'}\vec{M}\wedge d\vec{V}=0.$$

Ces relations peuvent s'interpréter comme traduisant l'égalité de la variation, dans la transformation infinitésimale $(M,\vec{V})$, du vecteur axial

$$\iint_{S}\vec{n}\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_{C}\vec{M}\wedge d\vec{M}$$

correspondant univoquement à toute courbe fermée (C) sans nœud de E^3 et de la variation dans la transformation réciproque du vecteur

$$\iint_{S'}\vec{n}'\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_{C'}\vec{V}\wedge d\vec{V}$$

6. Nous allons maintenant établir une propriété concernant les champs réciproques, associés à toute correspondance ponctuelle conforme entre E^3 et E'^3.

Soient (S) une surface quelconque de E^3, et le vecteur $\vec{T}$ du champ $(M,\vec{V})$ restreint à cette surface.

On a vu que si $\vec{\nu}$ est la variation de $\vec{V}$ le long de la normale unitaire $\vec{N}$ de (S), on a, en tout point M de (S)

$$\overrightarrow{rot\,V}=2\vec{T}+\vec{N}\wedge\vec{\nu}.$$

Mais, la correspondance entre E^3 et E'^3 étant conforme, on peut écrire, k étant le rapport en M et M' des modules des éléments linéaires

de E'^3 et de E^3 :

$$\overrightarrow{rot\,V} = 2\vec{T} + \vec{N} \wedge \vec{N}' k ;$$

de même

$$\overrightarrow{rot'\,M} = 2\vec{T}' + \vec{N}' \wedge \frac{\vec{N}}{k},$$

et comme $\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G} = \frac{H'}{H} = k^2$, on a

$$2\vec{T}' = -\frac{1}{H'^2}(G_1\vec{p} - 2F_1\vec{q} + E_1\vec{r}) = -\frac{2\vec{T}}{k^2}$$

Par suite

$$\overrightarrow{rot'\,M} = -\frac{1}{k^2}(2\vec{T} + \vec{N} \wedge \vec{N}' k) = -\frac{\overrightarrow{rot\,V}}{k^2}$$

Ainsi :

Si la correspondance associée à deux champs réciproques à trois dimensions est conforme, les rotationnels de ces deux champs sont colinéaires . Le rapport du module du rotationnel du champ relatif à l'espace E^3, *au module du rotationnel du champ relatif à l'espace correspondant,* E'^3, *est égal au carré changé de signe du rapport, aux points correspondants, des modules des éléments linéaires de* E'^3 *et de* E^3.

Dans le cas où la correspondance ponctuelle qui lie (S) et (S') est conforme, le vecteur $\vec{T} \wedge \vec{T}'$, produit vectoriel des tourbillons des deux transformations infinitésimales associés, est nul. Calculons l'expression de ce vecteur dans le cas général.

On a (voir les n° 2 et 5)

$$\vec{T} \wedge \vec{T} = \frac{1}{2H^2}\left[(G\vec{p} - 2F\vec{q} + E\vec{r})\right] \wedge \left[-\frac{1}{2H'^2}(G_1\vec{p} - 2F_1\vec{q} + E_1\vec{r})\right]$$

$$= \frac{1}{(2HH')^2}\left[2\vec{q} \wedge \vec{r}(E_1F - F_1E) + \vec{r} \wedge \vec{p}(E_1G - G_1E) + 2\vec{p} \wedge \vec{q}(F_1G - G_1F)\right]$$

Effectuons le produit scalaire des vecteurs $\vec{T} \wedge \vec{T}'$ et $d\vec{M} \wedge d\vec{V}$, on obtient:

$$(1)\quad \vec{T} \wedge \vec{T}' . d\vec{M} \wedge d\vec{V} = -\frac{(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})}{2H^2H'^2}\left[(EF_1 - E_1F)du^2 + (EG_1 - E_1G)dudv + FG_1 - F_1G)dv^2\right]$$

On peut remarquer que la quantité

$$\frac{\vec{T} \wedge \vec{T}' . d\vec{M} \wedge d\vec{V}}{(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})} HH'$$

demeure invariante dans toute transformation conforme de l'une ou l'autre des surfaces (S) ou (S').

Le quotient par H ds^2 de la forme quadratique placée entre crochets dans la relation (1) est égal à la variation, dans la transformation finie qui fait passer de (S) en (S'), de l'angle formé par deux éléments linéaires orthogonaux de (S).

On peut déduire de l'équation (1) et de la remarque ci-dessus, en excluant le cas où $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})=0$, la construction suivante de la direction du vecteur $\vec{T}\wedge\vec{T}'$. La forme entre crochets s'annule pour les deux valeurs du rapport $m=\frac{dv}{du}$ correspondant aux directions tangentes en M aux courbes de l'unique réseau orthogonal (R) de (S) dont l'homologue (R') sur (S') est aussi orthogonal. Pour ces valeurs, $\vec{T}\wedge\vec{T}'$ et les directions correspondantes des éléments homologues $d\vec{M}$ et $d\vec{V}$ sont coplanaires. La direction du vecteur $\vec{T}\wedge\vec{T}'$ est donc celle de l'intersection des deux directions de plan déterminées, chacune, par la tangente en M à une des courbes de (R) et la tangente en V à son homologue dans (R').

Le cas où $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})=0$ est celui où il existe sur (S) et (S') une famille de courbes dont les tangentes aux points correspondants sont parallèles. La direction de $\vec{T}\wedge\vec{T}'$ est alors commune à toutes les directions de plan déterminées aux points M et V par deux éléments linéaires homologues quelconques. On en déduit, par exemple, que si la correspondance qui lie (S) et (S') est une projection cylindrique de directrice D (ou une projection conique de pôle O), les tourbillons des deux transformations associées sont, en tout point, perpendiculaires à D (ou au rayon vecteur OM ou OV). Si de plus cette correspondance est telle que $\varpi=0$, les lignes de tourbillon de l'une et l'autre des transformations associées sont les courbes planes (ou sphériques) intersection des ∞^1 plans perpendiculaires à D (ou des ∞^1 sphères de centre O), avec les surfaces (S) et (S').

8. Menons par un point arbitraire O un vecteur équipollent au vecteur

$$\frac{d\vec{M}}{ds}\wedge\frac{d\vec{V}}{ds}$$

correspondant à une valeur m donnée du rapport $\frac{dv}{du}$ des accroissements des variables u et v au point M. Quand m varie en ce point, l'extrémité de ce vecteur décrit une indicatrice, l'indicatrice (C) des déplacements, dans la transformation infinitésimale $(\vec{M},\vec{V})$, des éléments linéaires unitaires de (S) au point M. (C) est une conique située dans un plan (P) dont la direction est susceptible d'une interprétation géométrique intéressante.

Désignons par $\vec{\tau}$ le vecteur

$$\vec{\tau}=c\vec{p}-2b\vec{q}+a\vec{r},$$

et effectuons le produit vectoriel du tourbillon $\vec{T}$ et de ce vecteur :

$$\vec{T}\wedge\vec{\tau}=\frac{1}{2H^2}(G\vec{p}-2F\vec{q}+E\vec{r})\wedge(c\vec{p}-2b\vec{q}+a\vec{r})$$

$$=\frac{1}{2H^2}\left[2(bE-aF)\vec{q}\wedge\vec{r}+(cE-aG)\vec{r}\wedge\vec{p}+2(cF-bG)\vec{p}\wedge\vec{q}\right].$$

Multiplions scalairement les deux membres de cette équation par $d\vec{M}\wedge d\vec{V}$. On obtient

$$\vec{T}\wedge\vec{\tau}.d\vec{M}\wedge d\vec{V}=\frac{(\vec{p},\vec{q},\vec{r})}{H^2}\left[(bE-aF)du^2+(cE-aG)dudv+(cF-bG)dv^2\right]$$

Le quotient par Hds^2 de la forme quadratique placée entre crochets est égal à la demi-dilatation, dans la transformation infinitésimale $(\vec{M},\vec{V})$, de l'angle formé par deux éléments linéaires orthogonaux de (S). Une deuxième expression de cette demi-dilatation est :

$$N.\frac{d\vec{M}}{ds}\wedge\frac{d\vec{V}}{ds}-\omega\frac{d\vec{M}^2}{ds^2}.$$

En posant

$$\vec{K}=\frac{1}{\omega}\vec{N}+\frac{H\vec{\tau}\wedge\vec{T}}{(\vec{p},\vec{q},\vec{r})},$$

on peut écrire

(1) $$\vec{K}.d\vec{M}\wedge d\vec{V}=d\vec{M}^2,$$

ou

(2) $$\vec{K}.\frac{d\vec{M}}{ds}\wedge\frac{d\vec{V}}{ds}=1.$$

Comme le montre l'équation (2), la direction du vecteur $\vec{K}$ est perpendiculaire au plan (P) contenant l'indicatrice (C) des déplacements linéaires, et l'on peut (sous réserve d'analyticité) déduire de (1) que cette direction est coplanaire à $d\vec{M}$ et $d\vec{V}$ pour les valeurs du rapport $\frac{dv}{du}$ correspondant aux directions tangentes aux lignes de longueur nulle de (S) au point M.

Cette remarque permet l'interprétation suivante de la direction du plan (P).

Soit (I) le réseau des lignes de longueur nulle de (S), et considérons le réseau (J') homologue de (I) dans la correspondance qui lie les surfaces (S) et (S') : les lignes constituant le réseau (J') sont les lignes de (S') tangentes en chaque point M' à une asymptote de l'ellipse image, dans la transformation finie qui fait passer de (S) à (S'), d'un cercle infiniment petit tracé sur (S) et de centre M (ellipse de TISSOT).

La direction du plan (P) *est perpendiculaire à l'intersection des directions de plan déterminées chacune par la tangente en* M *à une des lignes du réseau* (I) *et la tangente en* V *à son homologue du réseau* (J').

On peut se demander si la direction de l'intersection des directions de plan déterminée chacune par la tangente à une ligne (de longueur nulle) du réseau (I) et par la tangente à la ligne anti-homologue du réseau (J') n'est pas elle aussi susceptible d'une interprétation intéressante.

Soient, au point M, $d\vec{M}$ et $\delta\vec{M}$, deux éléments linéaires de (S) correspondant respectivement aux couples du, dv et δu, δv des accroissements infinitésimaux des variables u et v, $d\vec{V}$ et $\delta\vec{V}$ les éléments homologues de (S').

La direction D de l'intersection des directions de plan déterminées respectivement par $d\vec{M}$ et $\delta\vec{V}$, $\delta\vec{M}$ et $d\vec{V}$ est celle du vecteur

$$(d\vec{M}\wedge\delta\vec{V})\wedge(\delta\vec{M}\wedge d\vec{V})$$

dont un simple calcul vectoriel montre qu'il peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\delta v}{\delta u}-\frac{dv}{du}\right)\left[\vec{p}\,du\,\delta u+\vec{q}\,(du\,\delta v+dv\,\delta u)+\vec{r}\,dv\,\delta v\right]\wedge\vec{u}$$

Pour les deux couples du, dv et δu, δv solutions de l'équation, définissant les lignes de longueur nulle de (S),

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=0,$$

le vecteur

$$\vec{p}\,du\,\delta u+\vec{q}\,(du\,\delta v+dv\,\delta u)+\vec{r}\,dv\,\delta v$$

est colinéaire au vecteur

$$\vec{p}\,G-2F\vec{q}+E\vec{r}=2H^2\vec{T}.$$

La direction D *est donc celle du produit vectoriel* $\vec{T}\wedge\vec{U}$ *du tourbillon et du vecteur de variation superficielle de la transformation* (M,$\vec{V}$).

Les considérations précédentes sur le réseau (I) des lignes de longueur nulle de (S) et son homologue (J') de (S') trouvent une application immédiate dans l'étude des familles de transformations infinitésimales des surfaces minima associées, dont il a été question au n° 4. Il résulte en effet de ce qui précède, que pour toutes les transformations infinitésimales de même hodographe (S') affectant une famille de surfaces minima associées, (S_α), le plan de l'indicatrice (C) des déplacements linéaires et le produit vectoriel du tourbillon et du vecteur de variation superficielle, ont même direction aux points de ces surfaces qui se correspondent dans leur association. En effet, dans la déformation

qui amène une surface minima (S_α) en coïncidence avec une de ses associées $(S_{\alpha'})$, la direction du plan tangent en M_α à (S_α) ne change pas et par suite les droites isotropes de ce plan restent parallèles à elles-mêmes. Par ailleurs les ellipses de TISSOT de (S') relatives aux deux cercles infinitésimaux de (S_α) et $(S_{\alpha'})$considérés respectivement en M_α et $M_{\alpha'}$ sont confondues puisque la transformation qui change (S_α) en $(S_{\alpha'})$ est une déformation. Les tangentes aux lignes des réseaux (I) et (J') gardent donc une direction invariable dans la déformation des surfaces (S_α) et il en est par suite de même des deux directions que nous avons considérées.

9. Nous allons établir, en utilisant les vecteurs du premier ordre des deux champs $(M,\vec{V})$ et $(V,\vec{M})$ appliqués aux surfaces (S) et (S') en correspondance, des relations liant deux éléments homologues $d\vec{M}$ et $d\vec{V}$. Ces relations, très simples, seront utiles dans la suite de notre étude.

Remarquons que

$$(\vec{M}_u \wedge \vec{V}_v + \vec{V}_u \wedge \vec{M}_v) \cdot \vec{M}_u = \vec{V}_u \cdot \vec{M}_v \wedge \vec{M}_u ,$$

ou

$$\vec{u} \cdot \vec{M}_u = -\vec{n} \cdot \vec{V}_u .$$

de même

$$\vec{u} \cdot \vec{M}_v = -\vec{n} \cdot \vec{V}_v .$$

On peut donc écrire, quel que soient du et dv :

$$\vec{u} \cdot d\vec{M} + \vec{n} \cdot d\vec{V} = 0 .$$

Le premier membre de l'équation ci-dessus n'est d'ailleurs pas autre chose que l'expression de la variation dans la transformation $(M,\vec{V})$, du produit scalaire, identiquement nul en du et dv, $\vec{n}.d\vec{M}$.

Appliquons à ce premier membre l'opération $\{\vec{N}', x\}$ qui substitue $\vec{N}' \wedge \vec{V}_u$ et $\vec{N}' \wedge \vec{V}_v$ à $\vec{V}_u$ et $\vec{V}_v$ dans toute expression x fonction de ces deux vecteurs. On obtient l'expression

$$2\vec{T}' \cdot d\vec{M} + \vec{n} \cdot \vec{N}' \wedge d\vec{V}$$

dont il est aisé de vérifier la nullité identique en du et dv.

Posant

$$h' = \frac{H}{H'} ,$$

on a donc

$$\vec{U} \cdot d\vec{M} + N \cdot d\vec{V} = 0 , \tag{1}$$

$$2\vec{T} \cdot d\vec{M} + h' \vec{N} \wedge \vec{N}' \cdot d\vec{V} = 0 . \tag{2}$$

Par réciprocité, en posant $h=\frac{H'}{H}$, on a

$$(1)' \qquad \vec{U}'.d\vec{V}+\vec{N}'.d\vec{M}=0,$$

$$(2)' \qquad 2\vec{T}'.d\vec{V}+h\vec{N}\wedge\vec{N}.d\vec{M}=0.$$

On déduit de l'équation (1) que si $d\vec{V}$ est perpendiculaire à $\vec{N}$, son homologue $d\vec{M}$ est perpendiculaire à $\vec{U}$ et est par suite dirigé suivant la projection orthogonale de $\vec{T}$ sur le plan tangent à (S). Soit D la direction de droite parallèle à l'intersection des plans tangents P et P' à (S) et (S') aux points homologues M et V. Les lignes intégrales du champ formé par la projection orthogonale, en chaque point M de (S), du tourbillon $\vec{T}$ de la transformation $(M,\vec{V})$ sur le plan tangent en M à (S) sont les courbes homologues des lignes de (S') tangentes en chaque point V à la direction D. Elles peuvent donc être définies par l'équation différentielle

$$\vec{N}.\vec{M}_u du+\vec{N}.\vec{V}_v dv=0.$$

En annulant $\vec{N}.d\vec{V}$ et $\vec{N}'.d\vec{M}$ on déduit par ailleurs de (1) et (1)' que le vecteur $\vec{u}$ est perpendiculaire à la direction de plan formée par l'élément de (S) homologue de l'élément de (S') parallèle à D et à l'élément de (S') de même signification. En particulier, il résulte de la remarque précédente que si la correspondance entre (S) et (S') est telle qu'il existe aux points correspondants deux éléments homologues parallèles (tous deux par suite parallèles à D), $\vec{u}$ est perpendiculaire à D donc coplanaire à $\vec{N}$ et $\vec{N}'$.

10. Multiplions par ω les deux membres de (1) et retranchons membre à membre l'équation obtenue, de (2)'. Il vient

$$(\omega\vec{N}+\vec{N}\wedge\vec{U}).d\vec{V}-(h\vec{N}\wedge\vec{N}'+\omega\vec{U}).d\vec{M}=0$$

Le vecteur

$$\vec{\Omega}=\omega\vec{N}+\vec{N}\wedge\vec{U}$$

de la première parenthèse est le vecteur rotation du trièdre géodésique de (S), attaché au point M, dont le mouvement dans la transformation est égal au mouvement moyen de tous les trièdres géodésiques de (S), considérés en ce point. Nous l'avons déjà utilisé dans le cas particulier des déformations, au n° 4.

Le vecteur de la deuxième parenthèse est égal au quotient par H^2 du vecteur

$$\vec{\tau}=c\vec{p}-2b\vec{q}+a\vec{r}$$

considéré au n° 8.

En effet, on a

$$c\vec{p}-(b''\vec{q}'+b'\vec{q}'')+a\vec{r}=$$

$$(\vec{M}_v\cdot\vec{V}_v)\vec{M}_u\wedge\vec{V}_u-(\vec{M}_v\cdot\vec{V}_u)\vec{M}_u\wedge\vec{V}_v-(\vec{M}_u\cdot\vec{V}_v)\vec{M}_v\wedge\vec{V}_u+(\vec{M}_u\cdot\vec{V}_u)\vec{M}_v\wedge\vec{V}_v$$

$$=[(\vec{M}_v\cdot\vec{V}_v)\vec{M}_u-(\vec{M}_u\cdot\vec{V}_v)\vec{M}_v]\wedge\vec{V}_u+[(\vec{M}_u\cdot\vec{V}_u)\vec{M}_v-(\vec{M}_v\cdot\vec{V}_u)\vec{M}_u]\wedge\vec{V}_v$$

$$=-(\vec{n}\wedge\vec{V}_v)\wedge\vec{V}_u+(\vec{n}\wedge\vec{V}_u)\wedge\vec{V}_v$$

$$=\vec{n}\wedge\vec{n}',$$

et

$$\vec{\omega u}=\frac{1}{2}(b''\vec{q}'-b'\vec{q}'-b''\vec{q}''+b'\vec{q}'').$$

Par suite

$$\vec{n}\wedge\vec{n}'+\vec{\omega u}=c\vec{p}-2b\vec{q}+a\vec{r}=\vec{\tau}.$$

Si la correspondance (S,S') est par orthogonalité des éléments, c'est-à-dire encore si la transformation $(M,\vec{V})$ (ou aussi bien $(V,\vec{M})$) est une déformation, le vecteur $\vec{\tau}$ est nul avec a,b,c.

Réciproquement, si le vecteur $\vec{\tau}$ est nul, et si les vecteurs $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ ne sont pas coplanaires, la correspondance est par orthogonalité des éléments, les transformations infinitésimales associées sont des déformations.

Supposons les vecteurs $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ coplanaires. Un calcul simple montre que pour la transformation $(M,\vec{V})$ la plus générale on a

$$2(\vec{p},\vec{q},\vec{r})=(\vec{n},\vec{u},\vec{n}').$$

La coplanairité des vecteurs $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ entraîne donc

$$\vec{n}\wedge\vec{n}'.\vec{u}=0$$

La nullité de $\vec{\tau}$ entraîne d'une part celle de $\vec{n}\wedge\vec{n}'$, d'autre part,
- soit celle du vecteur $\vec{u}$,
- soit celle de $\vec{\omega}$.

Ce dernier cas qui réunit à la fois le parallélisme des plans tangents de (S) et (S') (pour lequel les deux tourbillons sont colinéaires à la normale commune), et la nullité du flux de l'un ou l'autre tourbillon, est celui où l'une des transformations, donc l'autre, est irrotationnelle.

La nullité du vecteur $\vec{\tau}$ est par suite particulière à l'un des trois seuls types suivants de transformations infinitésimales :
- déformations,
- transformations à vecteur de variation superficielle nulle,
- transformations irrotationnelles.

Les trois types précédents de transformations infinitésimales possèdent en commun la particularité (liée aux deux expressions que l'on peut donner du vecteur $\vec{\tau}$) suivant laquelle l'appartenance d'une transformation à l'un de ces types entraîne l'appartenance de sa réciproque au même type.

Nous allons étudier chacun de ces trois types successivement. Nous ajouterons à cette étude celle d'un quatrième type de transformation infinitésimale, qui, bien que ne possédant pas le caractète de réciprocité des trois premiers, présente avec le premier et le dernier de ceux-ci des liens intéressants.

IV. - Déformations infinitésimales de (S).

11. Une transformation infinitésimale $(M,\vec{V})$ de (S) est une déformation (au sens de GAUSS) quand en tout point M de la surface (S) et pour toute valeur du couple du, dv en ce point on a :

$$d\vec{M}.d\vec{V}=0, \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$a=b=c=0.$$

Le problème de la déformation infiniment petite d'une surface (S) est le même, comme le montre l'équation (1), que celui de la détermination des surfaces (S') en correspondance par orthogonalité des éléments linéaires avec (S).

Ce double problème a été traité analytiquement et géométriquement par MOUTARD puis par DARBOUX (Théorie des surfaces livre VIII). Il est étudié d'un point de vue cinématique dans la thèse de M.H. PAILLOUX.

Nous allons ajouter aux études précédentes quelques remarques (de nature à la fois géométrique et cinématique) qu'il sera intéressant de rapprocher des propriétés des transformations infinitésimales que nous nous proposons d'étudier par la suite.

Rappelons brièvement la méthode employée par DARBOUX (Théorie des surfaces) pour résoudre le problème de la détermination des déformations infinitésimales d'une surface (S).

Cette méthode repose sur la mise préalable de l'expression du point M de (S) sous la forme (de LELIEUVRE),

$$\vec{M}=\int \vec{\theta}\wedge\left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}d\alpha-\frac{\partial\theta}{\partial\beta}d\beta\right). \tag{2}$$

Dans cette formule la signification analytique de $\vec{\theta}$ est la suivante : L'espace étant rapporté à un trièdre trirectangle quelconque O x, y, z les composantes de $\vec{\theta}$ sur les axes de références sont trois solutions

particulières d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = k(\alpha, \beta)\theta(\alpha, \beta), \tag{3}$$

où k est une certaine fonction de α et β.

Géométriquement on peut interpréter $\vec{\theta}$ comme un vecteur de direction parallèle à la normale à (S), dont le module est la racine quatrième de la courbure totale de (S) changée de signe :

$$\vec{\theta} = \sqrt[4]{\frac{-1}{R_1 R_2}}\ \vec{N}. \tag{4}$$

Le système des variables indépendantes α, β est celui des asymptotiques.

Ayant exprimé le point M par la formule (2), on détermine ensuite sa vitesse par la formule :

$$\vec{V} = \int \left(\vec{\theta}\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} - \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \alpha}\mu\right) d\alpha - \left(\vec{\theta}\frac{\partial \mu}{\partial \beta} - \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \beta}\mu\right) d\beta \tag{5}$$

dans laquelle μ est la solution générale de l'équation (3).

L'hodographe des vecteurs $\vec{V}$ est en correspondance par orthogonalité des éléments avec la surface (S).

Une deuxième expression du vecteur $\vec{V}$ est indiquée par DARBOUX. (S) étant rapportée à un système (u, v) quelconque, $\vec{V}$ peut être exprimé par la formule :

$$\vec{V} = \int \vec{\Omega} \wedge d\vec{M} \tag{6}$$

dans laquelle $\vec{\Omega}$ est un vecteur vérifiant l'égalité

$$\vec{\Omega}_u \wedge \vec{M}_v = \vec{\Omega}_v \wedge \vec{M}_u, \tag{7}$$

et qu'on peut interpréter cinématiquement comme la rotation commune à tous les trièdres géodésiques de (S) au point M dans la transformation infinitésimales de (S).

On a

$$\vec{\Omega} = \vec{N}\omega + \vec{N} \wedge \vec{U},$$

ω étant la rotation dans le plan tangent à (S) de toute direction Mt de ce plan au point M.

Supposons (S) rapportée au système (α, β) de ses asymptotiques et le point M exprimé sous la forme (1).

On aura

$$\vec{V} = \int \vec{\Omega} \wedge \left[\vec{\theta} \wedge \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \alpha} d\alpha - \vec{\theta} \wedge \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \beta} d\beta\right]$$

ou

$$\vec{V} = \int \left[(\vec{\Omega}.\frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \alpha})\vec{\theta} - (\vec{\Omega}.\vec{\theta})\frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \alpha}\right] d\alpha - \left[(\vec{\Omega}.\frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \beta})\vec{\theta} - (\vec{\Omega}.\vec{\theta}\frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \beta}\right] d\beta \tag{8}$$

L'identification des seconds membres de (5) et (8) donne

(9)
$$\vec{\Omega}\cdot\vec{\theta}=\mu,$$

$$\vec{\Omega}.\frac{\partial\vec{\theta}}{\partial\alpha}=\frac{\partial\mu}{\partial\alpha},$$

$$\vec{\Omega}.\frac{\partial\vec{\theta}}{\partial\beta}=\frac{\partial\mu}{\partial\beta}.$$

Les deux dernières équations peuvent d'ailleurs se déduire de la première. En effet, comme le montre la relation (7), on a

$$\vec{\Omega}_u\cdot\vec{M}_v\wedge\vec{M}_u=0\ ,\quad \vec{\Omega}_v\cdot\vec{M}_u\wedge\vec{M}_v=0,$$

et par suite

$$\vec{\Omega}_v\cdot\vec{\theta}=0\ ,\quad \vec{\Omega}_u\cdot\vec{\theta}=0.$$

On déduit de l'équation (9)

$$\mu=\vec{\Omega}.\vec{N}\sqrt[4]{\frac{-1}{R_1R_2}}\ ,$$

ou

(10)
$$\mu=\omega\sqrt[4]{\frac{-1}{R_1R_2}}\ .$$

De là, l'interprétation cinématique suivante de μ :

μ est le produit de la rotation ω par la racine quatrième de la courbure totale de (S) *changée de signe.*

En remplaçant dans (5) $\vec{\theta}$ et μ par leurs valeurs (4) et (10) on obtient après calcul et simplification, l'expression suivante de $\vec{V}$:

$$\vec{V}=\int\sqrt{\frac{-1}{R_1R_2}}\left[(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\vec{N}-\omega\frac{\partial\vec{N}}{\partial\alpha})d\alpha-(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\vec{N}-\omega\frac{\partial\vec{N}}{\partial\beta})d\beta\right].$$

Les composantes $d\vec{V}_t$ et $d\vec{V}_n$ de $d\vec{V}$ sur le plan tangent à (S) et sur la normale sont donc

$$d\vec{V}_t=-\omega\sqrt{\frac{-1}{R_1R_2}}(\frac{\partial\vec{N}}{\partial\alpha}d\alpha-\frac{\partial\vec{N}}{\partial\beta}d\beta)$$

$$d\vec{V}_n=\vec{N}\sqrt{\frac{-1}{R_1R_2}}(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}d\alpha-\frac{\partial\omega}{\partial\beta}d\beta)$$

On peut remarquer que la direction de la projection orthogonale du tourbillon sur le plan tangent en M à (S) (pour laquelle, comme nous l'avons établi au n° 9, la composante normale, $d\vec{V}_n$, de $d\vec{V}$ est nulle)

correspond à une valeur du rapport $\frac{d\beta}{d\alpha}$ égale, au signe près, à celle qui détermine la ligne de (S) passant par M, le long de laquelle la rotation ω conserve une valeur constante.

La rotation ω est susceptible d'une interprétation géométrique intéressante. Puisque

$$\vec{V}_u = \vec{\Omega} \wedge \vec{M}_u \quad , \quad \vec{V}_v = \vec{\Omega} \wedge \vec{M}_v \, ,$$

on a

$$\vec{n}' = (\vec{\Omega} \wedge \vec{M}_u) \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{M}_v) = (\vec{\Omega} . \vec{n}) \vec{\Omega} .$$

De cette relation on peut déduire l'expression suivante de la rotation géodésique $\vec{\Omega}$

$$\vec{\Omega} = \vec{N}' \frac{h}{\omega} \quad \text{avec} \quad h = \frac{H'}{H} \, ,$$

et par suite celle de la valeur absolue de ω

$$|\omega| = \sqrt{h (\vec{N} . \vec{N}')} \quad ;$$

ou, en désignant par φ l'angle des normales à (S) et (S') en M et V :

$$|\omega| = \sqrt{h \cos\varphi} \tag{11}$$

Le deuxième membre de cette équation peut être interprété géométriquement de la manière suivante.

Considérons deux éléments d'aire correspondants sur (S) et (S'). Le premier de ces deux éléments étant supposé réduit à l'unité, projetons l'élément, qui lui correspond sur (S') dans cette réduction, sur le plan tangent en M à (S). La racine carrée de la mesure de l'aire de cette projection est égale au second membre de (11), et par suite à la valeur absolue de la rotation ω.

On peut déduire des propositions précédentes deux applications immédiates.

Considérons la correspondance par orthogonalité des éléments la plus générale entre (S) et un plan (P'). On sait que cette correspondance est obtenue par la construction (de GUICHARD) qui consiste à faire tourner de $\frac{\pi}{2}$ dans le plan (P') autour d'un point fixe O de ce plan la projection orthogonale, m, sur (P') du point courant M de (S). V étant le point déduit de m dans cette rotation, la correspondance qui lie les points M de (S) et les points V de (P') est par orthogonalité des éléments.

Appliquée aux deux transformations infinitésimales associées à cette correspondance, la construction de GUICHARD donne les propositions suivantes :

- toute déformation infinitésimale d'un plan est telle que la valeur absolue de la rotation ω est constante en tout point et égale à l'unité;

- Pour toute déformation infinitésimale d'une surface quelconque (S) dont l'hodographe des vitesses est un plan (P'), les lignes d'égale rotation sont les intersections de (S) par les plans parallèles à (S).

La première proposition est, compte tenu de l'interprétation de ω déduite de l'équation (11), une conséquence immédiate de la définition même de la construction de GUICHARD.

D'autre part, puisque la transformation $(V,\vec{M})$ est telle que $|\omega'|=1$, on a pour la transformation réciproque $(M,\vec{V})$,

$$|\omega| = |\omega'\frac{H'}{H}| = |\frac{H'}{H}|$$

et la valeur absolue de sa rotation ω est égale au cosinus de l'angle aigu formé par le plan tangent à (S) et par le plan (P'), ce qui démontre la deuxième proposition.

Interprétation géométrique de $\vec{U}$. L'annulation des scalaires a, b, c, qui caractérise toute déformation de (S) entraîne la nullité du vecteur $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = c\vec{p} - rb\vec{q} + a\vec{r}.$$

De la deuxième expression de ce vecteur,

$$\vec{\tau} = \vec{n}\wedge\vec{n}' + \bar{\omega}\vec{u},$$

on déduit l'expression suivante du vecteur de variation superficielle

$$\vec{U} = \frac{h}{\omega}\vec{N}'\wedge\vec{N}.$$

Par suite,

$$|\vec{U}| = \frac{h\sin\varphi}{\sqrt{h\cos\varphi}} = \sqrt{h\cos\varphi}\,\mathrm{tg}\varphi \qquad (12)$$

Le module du vecteur de variation superficielle est égal au produit de la rotation ω par la tangente de l'angle des normales à (S) et (S').

On peut déduire de (12) une construction géométrique simple de la direction du tourbillon $\vec{T}$. On a

$$\vec{T} = \vec{N}\omega + \vec{N}\wedge(\vec{N}'\wedge\vec{N})\frac{h}{2\omega}$$

$$= \frac{1}{2}h[\cos\varphi\vec{N} + \vec{N}'].$$

Pour construire la direction du tourbillon au point M, il suffit donc de faire la somme géométrique du vecteur unitaire $\vec{N}'$ normal à (S') au point V et de la projection de ce vecteur sur la normale à (S) au point M.

V. - Transformation à vecteur de variation superficielle nul.

12. Le problème de la détermination des transformations infinitésimales $(M,\vec{V})$ d'une surface (S), pour lesquelles le vecteur de variation superficielle $\vec{U}$ est nul est identique à celui des déformations infinitésimales de (S). Si l'on connaît la déformation infinitésimale la plus générale $(M,\vec{V}^*)$ de (S), on en déduira la transformation infinitésimale $(M,\vec{V})$ à vecteur de variation superficielle nul la plus générale en prenant pour vitesse $\vec{V}$ du point M le vecteur de rotation géodésique $\vec{\Omega}^*$ en M de la déformation $(M,\vec{V}^*)$. En effet, la relation :

$$\vec{M}_u \wedge \vec{\Omega}^* + \vec{\Omega}^* \wedge \vec{M}_v = 0$$

à laquelle doit satisfaire $\vec{\Omega}^*$ exprime la nullité du vecteur de variation superficielle de la transformation $(M,\vec{\Omega}^*)$.

L'étude cinématique de ces transformations a été faite dans la thèse de M.H. PAILLOUX, celle des propriétés géométriques de la correspondance ponctuelle qui lie la surface (S) et la surface (S'), hodographe des vecteurs $\vec{V} = \vec{\Omega}^*$ avait été antérieurement développée dans le chapitre de l'ouvrage cité de DARBOUX, consacré à la théorie des douze surfaces.

Rappelons la forme sous laquelle on peut mettre l'élément linéaire de l'hodographe (S').

Puisque la correspondance entre (S) et (S') est par parallélisme des plans tangents on peut poser :

$$\vec{V}_u = \beta' \vec{M}_u + \alpha \vec{M}_v$$

$$\vec{V}_v = \gamma \vec{M}_u + \beta'' \vec{M}_v .$$

Par suite

$$\vec{u} = \vec{M}_u \wedge \vec{M}_v (\beta'' + \beta') = 0$$

et

$$\beta' + \beta'' = 0$$

Posant

$$\beta' = -\beta'' = \theta$$

on peut donc donner au vecteur $\vec{V}$ la forme suivante :

$$\vec{V} = \int (\theta \vec{M}_u + \alpha \vec{M}_v)\, du + (\gamma \vec{M}_u - \theta \vec{M}_u)\, dv .$$

dans laquelle α, γ, θ, satisfont à la relation :

$$(1) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial v}\vec{M}_u + \frac{\partial \alpha}{\partial v}\vec{M}_v + \theta \vec{M}_{uv} + \alpha \vec{M}_{vv} = \frac{\partial \gamma}{\partial u}\vec{M}_u - \frac{\partial \theta}{\partial u}\vec{M}_v + \gamma \vec{M}_{uu} - \theta \vec{M}_{vu} .$$

En projetant les deux membres de cette équation sur la normale à (S), on obtient :

$$2\theta\vec{N}.\vec{M}_{uv}+\alpha\vec{N}.\vec{M}_{vv}-\gamma\vec{N}.\vec{M}_{uu}=0. \tag{2}$$

Si le système (u,v) est celui des asymptotiques de (S), les cœfficients de α et γ sont nuls, ainsi par suite que θ. On a alors

$$\vec{V}_u=\alpha\vec{M}_v \qquad \vec{V}_v=\gamma\vec{M}_u$$

En multipliant scalairement les deux membres de (1) par $\vec{M}_u$ puis $\vec{M}_v$, on obtiendra un système de deux équations aux dérivées partielles en α et γ. L'élimination de α (ou γ) entre ces deux équations donnera une équation aux dérivées partielles du type de LAPLACE en γ (ou α). L'intégration de cette équation puis le calcul de α (ou γ) fourniront la solution la plus générale du problème de la détermination des transformations infinitésimales de (S) à vecteur de variation superficielle nul.

Supposons que le système (u,v) soit tel que les deux réseaux conjugués qui se correspondent sur (S) et (S') par parallélisme de leurs tangentes soient formés des lignes coordonnées de ces deux surfaces. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\alpha=\gamma=0$. On a alors

$$\vec{V}_u=\theta\vec{M}_u \qquad \vec{V}_v=-\theta\vec{M}_v \tag{3}$$

Des relations ci-dessus on déduit immédiatement la suivante,

$$2\theta\vec{M}_{uv}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\vec{M}_u+\frac{\partial\theta}{\partial u}\vec{M}_v=0, \tag{4}$$

qui ramène (ainsi qu'il est signalé dans le livre VIII de DARBOUX) la recherche de la surface (S'), à la détermination, sur (S), du réseau conjugué le plus général défini par une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre à invariants égaux.

Si l'on suppose maintenant que le système (u,v) est celui des lignes de courbure de (S), l'équation (2) devient, en désignant par R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de (S) correspondant aux directions tangentes aux lignes v = Cte et u = Cte :

$$\frac{\alpha G}{R_2}-\gamma\frac{E}{R_1}=0. \tag{5}$$

La rotation ω est égale à

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{EG}}(\alpha G-\gamma E);$$

Si γ est différent de zéro on peut l'écrire

$$\omega=\frac{\gamma}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\alpha}{\gamma}G-E\right),$$

et compte tenu de (5)

$$\omega = \frac{\gamma E}{\sqrt{EG}} \frac{R_2 - R_1}{R_1}. \tag{6}$$

La remarque précédente va nous permettre de déterminer, parmi les transformations infinitésimales à variation superficielle nulle, toutes celles qui admettent la nullité de ω, et par suite (puisque la correspondance entre (S) et (S') est par parallélisme des plans tangents) celle du vecteur $\vec{T}$.

(S) étant toujours rapportée à ses lignes de courbure supposons que γ soit nul. L'équation (5) montre qu'il en est alors de même de α. Le système (u, v) des lignes de courbure de (S) à donc, d'après ce qui précède ses invariants ponctuels égaux. Or les seules surfaces dont les lignes de courbure jouissent d'une telle propriété sont les surfaces minima, la fonction θ de l'équation (4) étant égale (à un facteur constant près) à l'une ou l'autre des courbures principales. Il résulte alors, des équations (3) que l'hodographe (S') est une sphère homothétique à la sphère image de (S'). Supposons maintenant que γ ne soit pas nul, la formule (6) montre alors que (S) est une sphère homothétique (par suite du parallélisme des plans tangents de (S) et (S') de la sphère image de l'hodographe (S'). On a lors

$$\vec{M} = k \vec{N}'.$$

Mais comme la transformation $(V, k\vec{N}')$ réciproque de la transformation $(kN', \vec{V})$ actuellement considérée doit être telle que le vecteur $\vec{U}$ soit nul, l'hodographe (S') ne peut être d'après ce qui précède qu'une surface minima :

Les seules transformations infinitésimales irrotationnelles à vecteur de variation superficielle nul, sont donc les transformations des surfaces minima dont l'hodographe est une sphère homothétique de leur image sphériques, ou les transformations de la sphère réciproques des précédentes.

VI. - Transformations infinitésimales irrotationnelles.

13. Nous avons démontré au n° 4 que le problème de la détermination de toutes les transformations infinitésimales d'une surface minima (S) pour lesquelles le tourbillon $\vec{T}$ est nul se ramène à la recherche des déformations infiniment petites de l'adjointe d'O. BONNET de (S).

Nous nous proposons maintenant de déterminer les transformations irrotationnelles d'une surface (S) quelconque.

Pour obtenir une transformation $(M, \vec{V})$ pour laquelle le vecteur $\vec{T}$ est nul, il suffit d'exprimer, d'une part que la composante normale ω de $\vec{T}$ est nulle, d'autre part que la correspondance entre (S) et l'hodographe

(S') est par parallélisme des plans tangents, car alors le vecteur $\vec{U}$ étant colinéaire à la normale, la composante tangentielle, $\frac{1}{2}\vec{N}\wedge\vec{U}$, de $\vec{T}$ est aussi nulle.

On peut exprimer cette deuxième condition en posant

$$\vec{V}_u = \frac{\alpha}{E}\vec{M}_u + \frac{\beta'}{G}\vec{M}_v ,$$

$$\vec{V}_v = \frac{\beta''}{E}\vec{M}_u + \frac{\gamma}{G}\vec{M}_v .$$

Supposons le système (u,v) orthogonal et exprimons la nullité de ω:

$$\vec{M}_v \cdot \vec{V}_u - \vec{M}_u \cdot \vec{V}_v = \beta' - \beta'' = 0$$

On en déduit

$$\beta' = \beta'' .$$

Posons alors

$$\beta' = \beta'' = \theta$$

on peut donner à l'expression du vecteur $\vec{V}$ la forme suivante

$$\vec{V} = \int \left(\frac{\alpha}{E}\vec{M}_u + \frac{\theta}{G}\vec{M}_v\right) du + \left(\frac{\theta}{E}\vec{M}_u + \frac{\gamma}{G}\vec{M}_v\right) dv .$$

Exprimons la condition d'intégrabilité de la quantité sous le signe $\int$:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\alpha}{E}\right)\vec{M}_u + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta}{G}\right)\vec{M}_v + \frac{\alpha}{E}\vec{M}_{uv} + \frac{\theta}{G}\vec{M}_{vv} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta}{E}\right)\vec{M}_u + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma}{G}\right)\vec{M}_v + \frac{\theta}{E}\vec{M}_{uu} + \frac{\gamma}{G}\vec{M}_{vu}$$

Projetons orthogonalement les deux membres de l'équation précédente sur la normale à (S), Si l'on suppose que le système (u,v) est celui des lignes de courbure on obtient

$$\frac{\theta}{R_1} = \frac{\theta}{R_2} .$$

Excluons le cas où (S) est une sphère ; la relation précédente entraîne alors nécessairement

$$\theta = 0 ,$$

et l'on a

$$\vec{V}_u = \frac{\alpha}{E}\vec{M}_u \quad , \quad \vec{V}_v = \frac{\gamma}{G}\vec{M}_v .$$

La surface (S) *et l'hodographe* (S') *se correspondent par parallélisme de leurs lignes de courbure.*

On est donc ramené au problème connu de la détermination des surfaces (S') qui admettent même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que la surface (S).

Désignons par R'_1 et R'_2 les rayons de courbure principaux de la surface (S'). On a

$$\vec{N}_u = -\frac{1}{R_1}\vec{M}_u = -\frac{1}{R'_1}\vec{V}_u ,$$

$$\vec{N}_v = -\frac{1}{R_2}\vec{M}_v = -\frac{1}{R'_2}\vec{V}_v ,$$

et par suite

$$\frac{\alpha}{E} = \frac{R'_1}{R_1} , \quad \frac{\gamma}{G} = \frac{R'_2}{R_2} .$$

Par ailleurs

$$a = \vec{M}_u \cdot \vec{V}_u = \alpha , \quad c = \vec{M}_v \cdot \vec{V}_v = \gamma .$$

On déduit de ces relations l'expression suivante de la dilatation superficielle σ :

$$\sigma = \frac{1}{EG}(aG + cE)$$

$$= \frac{R'_1}{R_1} + \frac{R'_2}{R_2} .$$

La dilatation superficielle est égale à la somme des rapports des rayons de courbure principaux homologues, de (S) *et de* (S').

Cas de la sphère. Nous avons exclu le cas où la surface (S) est une sphère. Dans ce cas, le problème de la détermination des transformations irrotationnelles de (S) se résoud de la manière suivante.

Puisque la correspondance entre (S) (que nous supposerons de rayon unité) et son hodographe (S') est par parallélisme des plans tangents, (S) peut être confondue avec la sphère image de (S').

On a donc

$$\vec{M} = \vec{N}' .$$

La relation

$$\varpi = \vec{M}_v \cdot \vec{V}_u - \vec{M}_u \cdot \vec{V}_v = 0 ,$$

devient

$$\vec{N}'_v \cdot \vec{V}_u - \vec{N}'_u \cdot \vec{V}_v = 0 .$$

Elle est vérifiée pour toutes les surfaces qui admettent (S) pour image sphérique. On est donc ramené au problème de la détermination des surfaces qui admettent une image sphérique donnée.

14. Nous allons reprendre d'une manière un peu différente le problème de la recherche des transformations irrotationnelles d'une surface (S) quelconque.

Puisque $\omega = 0$ on peut poser

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad_M \lambda} + \mu \vec{N},$$

λ et μ étant deux scalaires à déterminer de telle manière que la correspondance entre (S) et (S') soit par parallélisme des plans tangents.

En supposant le système (u, v) orthogonal on peut écrire

$$\vec{V} = \frac{1}{E}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\vec{M}_u + \frac{1}{G}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\vec{M}_v + \mu \vec{N}.$$

Exprimons que l'on a

$$\vec{N} \cdot \vec{V}_u = 0 \quad , \quad \vec{N} \cdot \vec{V}_v = 0.$$

On obtient

$$\frac{1}{E}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\vec{N} \cdot \vec{M}_{uu} + \frac{1}{G}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\vec{N} \cdot \vec{M}_{uv} + \frac{\partial \mu}{\partial u} = 0$$

$$\frac{1}{G}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\vec{N} \cdot \vec{M}_{vv} + \frac{1}{E}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\vec{N} \cdot \vec{M}_{uv} + \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0$$

Si le système (u, v) est celui des lignes de courbure les équations précédentes deviennent

$$\frac{1}{R_1}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{1}{R_2}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0.$$

En éliminant μ entre ces deux équations on sera conduit à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

(1) $$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right);$$

la quadrature

(2) $$\mu = -\int \frac{1}{R_1}\frac{\partial \lambda}{\partial u}du + \frac{1}{R_2}\frac{\partial \lambda}{\partial v}dv$$

permettra de calculer ensuite μ :

On reconnaît en (1) et (2) les équations indiquées par DARBOUX pour déterminer les surfaces qui admettent même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que la surface (S).

Notons la deuxième forme que l'on peut donner à l'expression du vecteur $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad_N \mu} + \mu \vec{N},$$

dans laquelle la notation $\overrightarrow{\text{grad}_N}$ représente le gradient d'un scalaire considéré comme fonction des points N de la sphère image de (S) et où μ est solution de l'équation du 2ème ordre

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(R_1\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(R_2\frac{\partial \mu}{\partial v}\right).$$

15. Nous allons enfin exposer une dernière méthode de détermination des transformations infinitésimales irrotationnelles de (S). Cette méthode, déduite de la précédente, est intéressante dans le cas où l'on veut se donner à l'avance la famille des lignes intégrales (C) du champ formé par les composantes tangentielles des vitesses $\vec{V}$.

Supposons (S) rapportée au réseau formé par les courbes (C) (v=Cte) et leurs trajectoires orthogonales (u Cte). On peut alors exprimer $\vec{V}$ sous la forme :

$$\vec{V}=x\vec{M}_u+z\vec{N}.$$

Pour que $(M,\vec{V})$ soit une transformation à rotation moyenne nulle il faut et il suffit que $\vec{V}.d\vec{M}$ soit une différentielle exacte. Puisque F=o on doit donc avoir

$$\frac{\partial x E}{\partial v}=0,$$

ou

$$x=\frac{f(u)}{E},$$

$f(u)$ étant une fonction de u seul.

Ecrivons que la correspondance entre (S) et l'hodographe (S') est par parallélisme des plans tangents :

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{E}\right)\vec{M}_u+\frac{f}{E}\vec{M}_{uu}+\frac{\partial z}{\partial u}\vec{N}+z\vec{N}_u\right].\vec{N}=0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f}{E}\right)\vec{M}_u+\frac{f}{E}\vec{M}_{uv}+\frac{\partial z}{\partial v}\vec{N}+z\vec{N}_v\right].\vec{N}=0.$$

On doit donc avoir :

$$\frac{\partial z}{\partial u}=-\frac{f}{E}\vec{M}_{uu}.\vec{N},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{f}{E}\vec{M}_{uv}.\vec{N};$$

ou encore

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{f}{E}\vec{M}_u.\vec{N}_u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{f}{E}\vec{M}_u.\vec{M}_v=\frac{f}{E}\vec{M}_v.\vec{N}_u,$$

ce qui entraîne

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f}{E}\vec{M}_u \cdot \vec{N}_u\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{E}\vec{M}_u \cdot \vec{N}_v\right),$$

ou

$$(2)\qquad \frac{df}{f} = \frac{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{E}\vec{M}_u \cdot \vec{N}_u\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{E}\vec{M}_u \cdot \vec{N}_v\right)}{\frac{1}{E}\vec{M}_u \cdot \vec{N}_v} du.$$

f ayant été calculé par intégration de l'équation ci-dessus, z s'obtient ensuite par la quadrature :

$$z = \int \frac{f}{E}\vec{M}_u \cdot d\vec{N},$$

ou encore

$$z = \int \frac{f}{E}\vec{N}_u \cdot d\vec{M}.$$

L'équation (2) montre qu'il n'est pas possible de choisir d'une manière entièrement arbitraire le système orthogonal (u,v) ou ce qui revient au même, la famille des courbes (C). En effet puisque f est fonction de u seul, il doit en être de même du second membre de l'équation (2). Si l'on se donne donc les courbes (C) à l'avance, le calcul du deuxième membre de (2) permettra de reconnaître si les courbes choisies peuvent être les lignes intégrales du champ formé par les composantes tangentielles des vitesses $\vec{V}$ d'une transformation infinitésimale irrotationnelle de (S).

A titre d'exemple nous allons déterminer les conditions auxquelles doit satisfaire (S) pour que les courbes (C) d'une transformation $(M,\vec{V})$ irrotationnelle puissent être confondues avec une famille de lignes de courbure de (S). (S) étant rapportée au système (u,v) de ses lignes de courbure on a

$$\vec{M}_u \cdot \vec{N}_v = 0.$$

La conditions exprimée par l'équation (1) exige que

$$\frac{f(u)}{E}\vec{M}_u \cdot \vec{N}_u = P(u),$$

$P(u)$ étant fonction du seul paramètre u.

Désignons par R_1 le rayon de courbure principal correspondant à la ligne de courbure v=Cte. La relation ci-dessus qui s'écrit alors

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{P(u)}{f(u)}$$

montre que R_1 doit être fonction de u seul. Or dans ce cas la ligne de

courbure v=Cte est nécessairement une géodésique de (S) ; (S) admet donc une famille de lignes de courbure géodésiques (donc planes) et est par suite une surface moulure engendrée par une courbe plane invariable quelconque (C) dont le plan roule sans glisser sur une développable arbitraire :

Les seules surfaces susceptibles de subir une transformation infinitésimale irrotationnelle, telle que les lignes intégrales du champ formé par les composantes tangentielles des vitesses coïncident avec une famille de lignes de courbure (C) *sont donc les surfaces moulures, les lignes intégrales du champ étant les profils plans* (C).

Il résulte de ce qui précède, que la détermination des différentes transformations infinitésimales irrotationnelles d'une surface moulure quelconque (S) rapportée à ses profils plans (v=Cte) et à leurs trajectoires orthogonales (u=Cte) se ramène à la quadrature :

$$z=-\int\frac{f(u)}{R_1(u)}du,$$

où $f(u)$ est une fonction arbitraire de u et R_1 le rayon de courbure du profil plan (v=Cte) de (S), l'expression de la vitesse $\vec{V}$ attachée au point courant M de (S) dans une telle transformation étant :

$$\vec{V}=\frac{f(u)}{E}\vec{M}_u-\vec{N}\int\frac{f(u)}{R_1}du.$$

Si l'on prend pour paramètre u l'arc de profil plan (C) compté à partir d'une courbe (u=Cte) fixe, l'expression de $\vec{V}$ peut s'écrire :

$$\vec{V}=f(s)\frac{d\vec{M}}{ds}-\vec{N}\int\frac{f(s)}{R_1}ds. \tag{3}$$

Elle montre que l'extrémité du vecteur $\vec{V}$ est le point courant de la courbe (C') la plus générale qui correspond à la courbe plane (C) par parallélisme des tangentes. L'hodographe (S') est donc une surface moulure qui correspond à (S) par parallélisme des lignes de courbure. On retrouve le résultat du n° 12.

Le cas particulier où, dans l'expression (3), $f(s)=-s$ conduit à la construction géométrique simple suivante.

Le vecteur $\vec{V}$ a alors pour expression

$$\vec{V}=-s\frac{d\vec{M}}{ds}+\vec{N}\int\frac{s\,ds}{R_1};$$

le point

$$\vec{\mu}=\vec{M}-s\frac{d\vec{M}}{ds}$$

décrit une développante (Y) de C, le point

$$\vec{\mu}' = \vec{\mu} + \vec{N} \int \frac{s\,ds}{R_1}$$

une développante (Y') de (Y) et le vecteur ayant pour origine le point M et pour extrémité le point correspondant μ' sur la deuxième développante (Y') de (C) est le vecteur vitesse attaché à M dans une transformation infinitésimale irrotationnelle de (S).

Si (C) est une spirale logarithmique de pôle I (origine des arcs sur (C)) coupant sous l'angle $\frac{\pi}{4}$ les droites issues de I, sa deuxième développante (Y') est la spirale symétrique de C par rapport à I, M et μ' étant constamment symétriques. Les déplacements infinitésimaux des différents points M de la surface moulure (S) engendrée par (C) dans le roulement de son plan sur la développable base ($\triangle$) sont dirigés vers les pôles I correspondants, et leurs amplitudes sont proportionnelles aux modules des vecteurs vitesses $M\vec{\mu}'$, donc aux distances MI.

Si ($\triangle$) se réduit à un cône quelconque de sommet I (pôle de C) les déplacements infinitésimaux des différents points M de (S) dans la transformation infinitésimale irrotationnelle envisagée sont dirigées vers le point fixe I et proportionnels à MI. Dans le cas actuel l'hodographe des vitesses dans la transformation infinitésimale considérée (défini à une homothétie près) est la surface moulure (S') (symétrique de (S) par rapport à I), et l'échange des rôles de (S) et (S') qui revient à remplacer la transformation infinitésimale par sa réciproque fournit une vérification immédiate de la propriété antérieurement établie de la conservation du caractère irrotationnel d'une transformation infinitésimale dans le passage de cette transformation à sa réciproque.

VII. - Transformations à rotation élémentaire nulle.

16. Nous nous proposons de déterminer enfin les transformations infinitésimales pour lesquelles l'équation

$$\vec{N} \wedge d\vec{M} . d\vec{V} = 0 \qquad (1)$$

est identiquement vérifiée en du et dv, en tout point de (S).

On peut remarquer que si (S) est une surface minima le problème de la détermination de ces transformations se ramène à la détermination des déformations infinitésimales de l'adjointe d'O. BONNET de (S).

Supposons (S) quelconque et posons

$$\vec{V}_u = \alpha_1 \vec{M}_u + \beta_1 \vec{M}_v + \gamma_1 \vec{N},$$

$$\vec{V}_v = \alpha_2 \vec{M}_u + \beta_2 \vec{M}_v + \gamma_2 \vec{N}.$$

Pour que (1) soit vérifiée identiquement en du et dv on doit avoir :

$$\vec{N}\wedge\vec{M}_u \cdot \vec{V}_u = 0,$$

$$\vec{N}\wedge\vec{M}_u \cdot \vec{V}_v + \vec{N}\wedge\vec{M}_v \cdot \vec{V}_u = 0,$$

$$\vec{N}\wedge\vec{M}_v \cdot \vec{V}_v = 0,$$

ce qui entraîne respectivement

$$\beta_1 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_2, \quad \alpha_2 = 0.$$

Posons

$$\alpha_1 = \beta_2 = \mu.$$

On peut donc donner à l'expression de $\vec{V}$ la forme suivante

$$\vec{V} = \int (\mu\vec{M}_u + \gamma_1\vec{N})\,dv + (\mu\vec{M}_v + \gamma_2\vec{N})\,dv.$$

Ecrivons la condition d'intégrabilité de la quantité sous le signe $\int$:

$$\frac{\partial\mu}{\partial v}\vec{M}_v + \mu\vec{M}_{uv} + \frac{\partial\gamma_1}{\partial v}\vec{N} + \gamma_1\frac{\partial\vec{N}}{\partial v} = \frac{\partial\mu}{\partial u}\vec{M}_u + \mu\vec{M}_{vu} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial u}\vec{N} + \gamma_2\frac{\partial\vec{N}}{\partial u}.$$

En projetant orthogonalement les deux membres de l'équation sur $\vec{N}$ on obtient

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial v} = \frac{\partial\gamma_2}{\partial u}.$$

On peut donc poser

$$\gamma_1 = \frac{\partial\lambda}{\partial u}, \qquad \gamma_2 = \frac{\partial\lambda}{\partial v},$$

λ étant une fonction de u, v à déterminer. $\vec{V}$ prend alors la forme suivante

$$\vec{V} = \int \mu d\vec{M} + d\lambda\vec{N}.$$

Si l'on suppose (S) rapportée à ses lignes de courbure la condition d'intégrabilité devient

$$\frac{\partial\mu}{\partial v}\vec{M}_u - \frac{1}{R_2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\vec{M}_v = \frac{\partial\mu}{\partial u}\vec{M}_v - \frac{1}{R_1}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\vec{M}_u.$$

On doit donc avoir

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0,$$

En éliminant μ entre ces deux équations on obtient l'équation aux dérivées partielles du 2ème ordre

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{R_2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right]=\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{R_1}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right];$$

μ s'obtiendra après résolution de cette équation par la quadrature

$$\mu=-\int\frac{1}{R_2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}du+\frac{1}{R_1}\frac{\partial\lambda}{\partial v}dv.$$

On voit donc qu'analytiquement on est conduit pour la solution du problème envisagé aux mêmes équations que celles rencontrées précédemment dans la recherche des transformations irrotationnelles de (S), mais, dans ces dernières équations, R_1 et R_2 tiennent respectivement la place de R_2 et R_1 dans les équations ci-dessus.

Cas de la sphère. Dans le cas où (S) est une sphère on obtient immédiatement

$$\mu=\lambda,$$

λ étant une fonction de u et v quelconque. Par suite

$$\vec{V}=\lambda\vec{N}.$$

Si l'on prend pour origine de l'hodographe (S') le centre O de la sphère (S) la correspondance qui lie ces deux surfaces est une projection conique du pôle O.

Interprétation cinématique de μ.

on a

$$d\vec{M}.d\vec{V}=\mu d\vec{M}^2,$$

ou

$$\frac{d\vec{M}}{ds}.\frac{d\vec{V}}{ds}=\mu.$$

μ est égal à la dilatation que subit tout élément linéaire unitaire de (S) au point M. Il est encore égal à la demi-dilatation superficielle, $\frac{\sigma}{2}$.

Le vecteur $\vec{U}$ peut être exprimé en fonction de μ et λ :

$$\vec{U}=\frac{1}{H}\left[\vec{M}_u\wedge(\vec{M}_v\mu+\vec{N}\frac{\partial\lambda}{\partial v})+(\vec{M}_u\mu+\vec{N}\frac{\partial\lambda}{\partial u})\wedge\vec{M}_v\right],$$

$$=2\vec{N}\mu-\overrightarrow{grad_M\lambda}.$$

On a par suite, puisque $\omega=0$

$$2\vec{T}=\vec{N}\wedge\vec{U}$$

$$=\overrightarrow{grad_M\lambda}\wedge\vec{N}.$$

On a par ailleurs

$$\vec{n}' = (\vec{M}_u \mu + \vec{N}\frac{\partial \lambda}{\partial u}) \wedge (\vec{M}_v \mu + \vec{N}\frac{\partial \lambda}{\partial v})$$

$$= H\mu(\mu \vec{N} - \overrightarrow{\mathrm{grad}_M \lambda})$$

$$= H\mu(\vec{U} - \vec{N}\mu).$$

On peut par suite donner au vecteur $\vec{U}$ l'expression suivante :

$$\vec{U} = \frac{h}{\mu}\vec{N}' + \vec{N}\mu, \qquad h = \frac{H'}{H}$$

$$(1) \qquad = \frac{2h}{\sigma}\vec{N}' + \frac{\sigma}{2}\vec{N}.$$

On en déduit

$$\sigma^2 = 4h\vec{N} \cdot \vec{N}',$$

et en désignant φ l'angle des deux normales $\vec{N}$ et $\vec{N}'$ à (S) et (S')

$$\sigma = 2\sqrt{h \cos\varphi}.$$

On obtient enfin la relation

$$\vec{T} = \frac{h}{\sigma}\vec{N} \wedge \vec{N}' = \frac{\sigma \vec{N} \wedge \vec{N}'}{4\vec{N} \cdot \vec{N}'},$$

de laquelle on déduit la propriété suivante :

Le module du tourbillon est égal au quart du produit de la dilatation superficielle par la tangente de l'angle des normales à (S) *et* (S').

On ne peut manquer de remarquer les analogies qui rapprochent les expressions des éléments d'une déformation de (S) et d'une transformation de (S) à rotation élémentaire nulle.

On pouvait prévoir que les particularitées entraînées par l'annulation de $d\vec{M}.d\vec{V}$ sur les expressions de $\vec{U}$, $\vec{T}$ et σ devaient se retrouver, par l'annulation de $\vec{N} \wedge d\vec{M}.d\vec{V}$ sur les éléments qui se déduisent de ces deux vecteurs et de ce scalaire par l'opération $\{N, \ \}$.

DEUXIEME PARTIE

I. - Transformations infinitésimales de la sphère.

17. Soient (S) une sphère, que nous supposerons pour simplifier de rayon unité, N son point courant.

Nous poserons

$$E=\vec{N}_u^2, \qquad F=\vec{N}_u\cdot\vec{N}_v, \qquad G=\vec{N}_v^2, \qquad H=\sqrt{EG-F^2}.$$

Soit (N, $\vec{V}$) une transformation infinitésimale quelconque de (S). La rotation moyenne ω et la demi-dilatation superficielle, $\frac{\sigma}{2}$, sont susceptibles d'une interprétation géométrique intéressante.

Menons par chacun des points V de l'hodographe (S') des vitesses, la droite D parallèle au rayon de la sphère (S) dont l'extrémité est le point N de (S) qui correspond à V. L'ensemble des droites D ainsi formé constitue une congruence rectiligne (D) rapportée à la surface de départ (S') et d'image sphérique (S).

Nous dirons de la transformation (N, $\vec{V}$) de (S) et de la congruence (D), rapportée à la surface (S'), qu'elles sont associées l'une à l'autre.

Soient p le paramètre moyen de la congruence, λ l'abscisse du point central relatif au rayon D, mesurée sur D à partir du point V.

On sait que

$$p=\frac{1}{H}(b''-b'),$$

$$\lambda=-\frac{1}{2H}(Ec-2Fb+Ga);$$

On a donc

$$\omega=\frac{p}{2}, \qquad \frac{\sigma}{2}=-\lambda.$$

La rotation moyenne ω et la demi-dilatation superficielle $\frac{\sigma}{2}$ de la transformation (N, $\vec{V}$) *(au point* N *de* (S)*) sont respectivement égales au demi-paramètre moyen et à l'abscisse changée de signe du point central, (relatifs au rayon* D *d'image* N*) de la congruence* (D) *associée à* (N, $\vec{V}$).

La rotation et la dilatation, relatives à l'élément linéaire unitaire $\frac{d\vec{M}}{ds}$ de toute courbe (C) de (S) sont, de même, respectivement égales au paramètre de distribution et à l'abscisse changée de signe du point central de la réglée de (D) dont l'image sphérique des rayons est la courbe (C).

Faisons varier d'une manière quelconque la surface de départ de la congruence (D). Pour cela, portons sur chaque rayon D de la congruence, un segment VV_l dont la longueur est une fonction l continue et uniforme du point N de (S). La surface (S'_l), lieu des points V_l, est une nouvelle surface de départ de la congruence. Considérons la transformation $(N, \vec{V}_l)$ de (S), pour laquelle la vitesse attachée au point N a pour extrémité le point V_l. Pour toutes les transformations que l'on peut considérer en faisant varier l d'une manière quelconque, la rotation de l'élément linéaire d'une courbe (C) de (S) est un invariant égal au paramètre de distribution de la réglée de (D) d'image sur (S) la courbe (C), la rotation moyenne ω est un invariant égal au paramètre moyen de (D).

Si la congruence (D) est normale, son paramètre moyen est nul et toutes les transformations infinitésimales associées à (D) sont à rotation moyenne nulle.

Par suite le problème de la détermination de la transformation infinitésimale de (S), la plus générale, telle que (S) soit surface de tourbillon, se résoud de la manière suivante :

On se donne la congruence normale (D) la plus générale et on associe au rayon générateur D de (D) son image sphérique N sur (S). On coupe les rayons de (D) par une surface (S') quelconque. L'extrémité du vecteur vitesse relatif au point N de (S) est le point d'intersection de cette surface et du rayon D d'image N. Si l'on choisit (S') parmi les surfaces orthogonales aux rayons de (D), la transformation correspondante est irrotationnelle.

18. Soit $(N, \vec{V})$ une transformation infinitésimale quelconque de (S). Nous nous proposons de déterminer parmi les transformations $[(N, \vec{V}) \longrightarrow (N, \vec{V}')]$ conservant N et remplaçant $\vec{V}$ par $\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\xi}$, ($\xi$ étant fonction uniforme du point N) celles qui laissent invariant le flux du rotationnel de $(N, \vec{V})$ à travers une portion quelconque de (S).

Le vecteur $\vec{\xi}$ ne sera déterminé en chaque point qu'à l'addition près d'un vecteur $\vec{\xi}_0$ de la forme $\vec{\xi}_0 = l\vec{N}$ dans laquelle l est une fonction arbitraire de u et v.

Soit C une courbe fermée quelconque tracée sur (S) et I le flux du rotationnel de la transformation $(N, \vec{V})$ à travers la portion de (S) limitée par C.

$$I = \int \vec{V} . d\vec{N}$$

D'après la formule (3) de réciprocité du n° 5 on a, en appelant C' la courbe de (S') homologue de C

$$\int_C \vec{V}.d\vec{N} = -\int_C \vec{N}.d\vec{V}.$$

Soit (R) la réglée (fermée ainsi que son image C) de la congruence (D) associée à (N, V) admettant la courbe C' pour directrice, et désignons par γ' une courbe quelconque tracée sur la réglée (R) et l'entourant.

On a quel que soit γ'

$$\int_{\gamma'} \vec{N}.d\vec{V}_l = \int_C \vec{N}.d\vec{V} = P(R)$$

Le flux I peut donc être considéré comme un invariant intégral (égal à -P(R)), défini sur (R) et ne dépendant que de cette surface.

Le problème de cinématique initial est donc équivalent au problème géométrique de la transformation d'une congruence rectiligne donnée quelconque (D) en congruences ($\triangle$) de même représentation sphérique avec conservation de l'invariant intégral P(R) pour toute surface réglée fermée (R) de la congruence.

La solution $\vec{\xi}$ cherchée sera le vecteur qui, pour chaque point N de la sphère (S), joint le point V de l'hodographe à un point quelconque du rayon $\triangle$ de ($\triangle$) homologue, dans la transformation de (D) en ($\triangle$), du rayon D de (D) passant par V.

Le problème de géométrie énoncée ci-dessus est résolu dans une note[1] de M. P. VINCENSINI, de la manière suivante.

Désignons par $m(x, y)$ le point ou le rayon D de (D), de cosinus directeurs $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $Z(x, y)$ perce le plan xOy, et par M le point où le rayon $\triangle$ homologue de D dans l'une quelconque des transformées ($\triangle$) de (D) perce le même plan.

La transformation cherchée est définie par les composantes P, Q du vecteur $\vec{\xi} = \vec{mM}$ et la condition :

$$\vec{N}_x.\vec{\xi}_y - \vec{N}_y.\vec{\xi}_x = 0$$

ou

$$\frac{D(X,P)}{D(x,y)} + \frac{D(Y,Q)}{D(x,y)} = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{D(X,P)}{D(Q,Y)} = 1.$$

(1) *Sur une transformation des champs de vecteurs unitaires* (C.R. t226, 1948 p. 1163-1165).

Les points A(X, P), B(Q, Y) du plan xOy se correspondent dans une équivalence superficielle directe, et le problème actuel de géométrie réglée (et par suite le problème initial de cinématique) se trouve ramené à celui, bien connu, de la détermination des équivalences directes du plan. Si X = X(Q, Y), P = P(Q, Y) sont les formules définissant l'équivalence directe [B(Q, Y)→A(X, P)] la plus générale du plan xOy, la donnée d'une congruence quelconque (D) (X, Y = fonctions connues de x, y) fait connaître P et Q, c'est à dire la transformation de (D) la plus générale [$(x, y)\rightarrow(x + P, y + Q)$] conservant les invariants intégraux **P**(R) sur les surfaces réglées fermées.

II. - Transformations à dilatation superficielle nulle.

19. Portons sur le rayon D de la congruence (D) associée à la transformation (N, V) un segment VV_0 égal à $-\frac{\sigma}{2}$.

V_0 est le point central de la congruence (D). Par suite, si l'on mène à partir du point V un vecteur égal à $-\frac{\vec{U}}{2}$, son extrémité se trouve dans le plan moyen de la congruence (D) (plan passant par le point central et perpendiculaire au rayon).

Cette propriété se trouve vérifiée quelle que soit la surface de départ que l'on a choisi pour la congruence (D).

Considérons la transformation $(N, \vec{V}_l)$ de (S) pour laquelle le vecteur vitesse est défini par la formule :

$$\vec{V}_l = \vec{V} + l\vec{N}$$

Affectant de l'indice l les éléments de la transformation $(M, \vec{V}_l)$, calculons $\vec{U}_l$ et σ_l

$$\vec{U}_l = \frac{1}{H}\left[\vec{N}_u \wedge \left(\vec{V}_v + \frac{\partial l}{\partial v}\vec{N} + l\vec{N}_v\right) + \left(\vec{V}_u + \frac{\partial l}{\partial u}\vec{N} + l\vec{N}_u\right) \wedge \vec{N}_v\right]$$

$$= \vec{U} + 2l\vec{N} - \overrightarrow{\mathrm{grad}_N\, l},$$

$$\sigma_l = \sigma + 2l.$$

Si l'on choisit l égal à $-\frac{\sigma}{2}$, la nouvelle transformation obtenue est à dilatation superficielle nulle. L'extrémité du vecteur vitesse est dans ce cas la surface moyenne (lieu du point central)de la congruence (D). On en déduit le mode suivant de détermination des transformations infinitésimales de la sphère à dilatation superficielle nulle.

Pour déterminer la transformation infinitésimale la plus générale de (S) *à dilatation superficielle nulle, il suffit d'associer à* (S) *la congruence rectiligne la plus générale, et de prendre pour vitesse du point* N *de* (S) *le vecteur défini par un point quelconque O de l'espace et le point central du rayon de la congruence dont l'image sphérique est* N.

On obtient une vérification immédiate de la construction géométrique précédente des transformations infinitésimales à dilatation superficielle nulle, en associant à (S) la congruence formée par les ∞^2 droites issues d'un point fixe, le centre C de (S) par exemple, lequel est point central sur chaque rayon N de (S). Les vecteurs vitesses des différents points N de (S) dans la transformation infinitésimale à dilatation superficielle nulle envisagée sont tous ici équipollents au vecteur fixe $\vec{OC}$, et la transformation infinitésimale de (S) se réduit à une translation parallèle à $\vec{OC}$, au cours de laquelle les aires sont évidemment conservées.

20. Dans le même ordre d'idée, proposons nous maintenant de déterminer les transformations infinitésimales de la sphère (S) pour lesquelles les surfaces transformées sont des sphères concentriques à (S), la dilatation superficielle étant nulle en chaque point.

Soit N_1 le point déduit de N par la transformation infinitésimale cherchée.

$$\vec{N}_1 = \vec{N} + \varepsilon \vec{V}.$$

$\vec{N}_1^2$ doit être constant. On doit donc avoir (en négligeant le terme en ε^2)

$$\vec{N}_1^2 = 1 + 2\varepsilon \vec{N}.\vec{V} = Cte,$$

soit

$$\vec{N}.\vec{V} = Cte = k \qquad (1)$$

D'autre part, la transformation $(N, \vec{V})$ étant à dilatation superficielle nulle, l'extrémité du vecteur $\vec{V}$ est le point central de la congruence (D) associée à la transformation $(N, \vec{V})$. L'équation (1) exprime donc que l'enveloppée moyenne (enveloppe du plan moyen) de la congruence (D) est une sphère de centre O de rayon k.

L'hodographe des vitesses de la transformation cherchée la plus générale est la surface moyenne de la congruence rectiligne (d'image (S)) à enveloppée moyenne sphérique la plus générale.

Le problème qui nous occupe est donc ramené au problème bien connu[1] de la détermination d'une congruence de ce type.

Dans le cas où $k = 0$, (S) se transforme en une sphère de même centre et de même rayon, d'autre part la sphère enveloppe du plan moyen de la congruence (D) se réduit à un point.

Le problème de la détermination des transformations infinitésimales de (S) en elle-même, telle que la dilatation superficielle soit nulle

(1) P. VINCENSINI *"Sur les congruences rectilignes à enveloppée moyenne donnée"*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse - 1929.

en chaque point est donc rqmenée à celui de la détermination des surfaces moyennes des congruences à enveloppée moyenne point (généralisant les congruences normales à enveloppée moyenne point introduites par P. APPELL).

Le problème de la transformation d'une surface sphérique (S) en une surface sphérique concentrique à la première avec conservation des aires a déjà été étudié d'une manière différente par M. VINCENSINI(1).

Le point de vue adopté dans le mémoire cité est le suivant :

On se donne une surface (S) et une suite continue à un paramètre de surfaces dont (S) fait partie, et l'on cherche les congruences curvilignes telles que les différents tubes (ou canaux) que l'on peut former avec leurs courbes, déterminent des cloisons équivalentes sur les différentes surfaces de la suite envisagée. La suite en question peut alors être regardée comme une onde transportant avec équivalence, à l'intérieur des canaux considérés, des aires prélevées sur (S).

Dans le cas où (S) est une sphère (de rayon 1 par exemple), et où la famille de ∞^1 surfaces dont elle fait partie est la famille de sphères concentriques

$$x^2+y^2+z^2-t^2=0,$$

ou t est un paramètre variable (qui peut être le temps), on est conduit, en définissant le système de canaux par les deux équations

$$P(x,y,z)=a$$

$$Q(x,y,z)=b$$

où a et b sont des constantes arbitraires, aux équations

(1) $$P=\mathrm{arc\ tg}\frac{y}{x}=a$$

et

(2) $$-\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{yz}{x^2+y^2}\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial z}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Parmi les solutions de (2) les fonctions Q de la forme

$$Q\equiv f(x^2+y^2+z^2)+z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(f = fonction arbitraire)

donnent en particulier un système de canaux de révolution autour de Oz. Il est entendu par là que l'ensemble des canaux infiniment déliés appartenant à la congruence $P=a$, $Q=b$, est de révolution autour de Oz.

(1). *"Propagations d'aires invariantes"* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 1933 (p. 41 - 48).

La congruence elle même est définie par

$$(3)\quad \begin{cases} \text{arc tg}\dfrac{y}{x} = a \\ f(x^2+y^2+z^2)+z\sqrt{x^2+y^2+z^2} = b \end{cases}$$

Conformément à ce qui a été dit plus haut, il existe à l'intérieur des canaux de la congruence (3) une propagation d'aires invariantes définie par les sphères (concentriques) :

$$(4)\qquad x^2+y^2+z^2-t^2=0.$$

A chaque instant t, les éléments superficiels propagés sont sur une même surface d'onde sphérique de centre O.

Les formules établies par M. VINCENSINI doivent permettre de retrouver les équations définissant les surfaces moyennes des congruences à enveloppée moyenne sphérique.

Il suffit pour cela de déterminer les champs de vitesses (dont les lignes intégrales sont les courbes d'équations (1) et (2) définissant les canaux de la propagation) qui, à l'instant t, permettent aux molécules de la sphère (4) de venir se disposer sur une sphère concentrique infiniment voisine. Les hodographes de ces champs seront les surfaces moyennes cherchées.

En particulier dans le cas, défini par les équations (3), d'un système de canaux de révolution, on peut retrouver l'équation des surfaces moyennes des congruences à enveloppée moyenne sphérique de révolution.

Coupons à cet effet la congruence (3) par un plan méridien $w\,O\,z$ quelconque, de trace Ow sur $x\,O\,M$, et désignons par φ l'angle $x\,O\,w$ du plan $x\,O\,y$ et par θ celui de la droite ON qui joint O à la molécule N de la sphère (4) (de rayon t) avec Oz. Les équations définissant la congruence (3) s'écrivent alors :

$$(6)\qquad \begin{aligned} \varphi &= a \\ f(t^2)+t^2\cos\theta &= b \end{aligned}$$

En désignant par w et z les composantes de $\vec{N}$ sur les axes Ow et Oz on a

$$w = t\sin\theta \qquad z = t\cos\theta$$

d'où en éliminant θ entre (6) et les équations ci-dessus :

$$w=\frac{1}{t}\sqrt{t^4-[b-f(t^2)]} \qquad z=\frac{b-f(t^2)}{t^2}$$

Les composantes W et Z de la vitesse du point N se déduisent en décrivant w et z par rapport à t :

$$W=\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{t^4+2f'(t^2)(b-f)t^2+(b-f)^2}{t^2\left[t^4-(b-f)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$Z=\frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{1}{t^2}(2t^2f'+b-f)$$

En remplaçant b par sa valeur tirée de (6), on obtient le champ des vitesses à l'instant t, relatif à la sphère de rayon t. En faisant $t=1$ et posant $f'(1)=k$, on obtient, pour les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ associé au point N de la sphère de rayon 1,

$$\vec{N}\begin{cases} x=\sin\theta\cos\varphi, \\ y=\sin\theta\sin\varphi, \\ z=\cos\theta, \end{cases}$$

les expressions suivantes :

$$\vec{V}\begin{cases} X=\dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta}(1+k\cos\theta+\cos^2\theta), \\ Y=\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}(1+k\cos\theta+\cos^2\theta), \\ Z=-(k+\cos\theta). \end{cases}$$

On vérifie immédiatement les relations

$$\vec{N}.\vec{V}=1, \qquad \frac{1}{2H}(Ec-2Fb+Ga)=0,$$

qui caractérisent les congruences à enveloppée moyenne sphérique [de représentation sphérique $\vec{N}(\theta, \varphi)$], rapportée à leur surface moyenne (l'hodographe du champ des vecteurs $\vec{V}$).

21. Soit $(N, \vec{V}_0)$ une transformation de (S) à dilatation superficielle nulle quelconque. Menons à partir du point $\vec{V}_0$ un vecteur égal à $-\vec{U}_0$ et désignons par E son extrémité.

E se trouve dans le plan moyen P_0 de la congruence (D) associée à $(N, \vec{V}_0)$ puisque $\vec{V}_0$ est le point central du rayon D de la congruence et que la transformation $(N, \vec{V}_0)$ étant à dilatation superficielle nulle le vecteur $\vec{U}_0$ est perpendiculaire à la normale à (S). Le point E occupe dans ce plan une position remarquable.

En effet soit $\vec{\xi}$ le vecteur qui joint le point V_0 au point où P_0 touche son enveloppe.

On a identiquement en *du, dv*

$$d(\vec{V}_o+\vec{\xi}).\vec{N}=0$$

ou

$$d\vec{V}_o.\vec{N}+d\vec{\xi}.\vec{N}=0.$$

Comme l'on a (identiquement en *du, dv*)

$$d\vec{V}_o.\vec{N}=-\vec{U}_o.d\vec{N}$$

et

$$d\vec{\xi}.\vec{N}=-d\vec{N}.\vec{\xi},$$

on en déduit

$$(\vec{U}_o+\vec{\xi}).d\vec{N}=0.$$

Les vecteurs $\vec{U}_o$ et $\vec{\xi}$ étant tous deux perpendiculaires à $\vec{N}$, et la relation ci-dessus devant être identiquement vérifiée en *du, dv* on a

$$\vec{\xi}=-\vec{U}_o.$$

Le point E, *extrémité du vecteur* $\vec{V}_o$ - $\vec{U}_o$, *est le point caractéristique de l'enveloppée moyenne (enveloppe du plan moyen) de la congruence* (D).

III. - Transformations pour lesquelles l'extrémité du vecteur $\vec{V}-\frac{\vec{U}}{2}$ est le point caractéristique de l'enveloppée moyenne.

22. L'extrémité R du vecteur $\vec{V}-\frac{\vec{U}}{2}$ relative à l'une quelconque des transformations (N, $\vec{V}$) associées à la congruence (D) se trouvant dans le plan moyen de cette congruence, on peut se demander s'il est possible de déterminer des transformations de (S) de telle manière que le point R coïncide avec le point caractéristique E de l'enveloppée moyenne de (D).

Supposons donc que la transformation (N, $\vec{V}$) soit telle que la relation

$$d(\vec{V}-\frac{\vec{U}}{2}).\vec{N}=0 \qquad (1)$$

soit vérifiée identiquement en *du, dv*

Puisque

$$d\sigma=d\vec{U}.\vec{N}+\vec{U}.d\vec{N}$$
$$=d\vec{U}.\vec{N}-\vec{N}.d\vec{V}$$

on déduit de (1)

$$2d\vec{V}.\vec{N}-d\sigma=0$$

Puisque $d\sigma$ est une différentielle exacte il est nécessaire qu'il en soit de même du produit scalaire $d\vec{V}.\vec{N}$.

On doit donc avoir

$$\frac{\partial}{\partial v}(\vec{N}.\vec{V}_u) = \frac{\partial}{\partial u}(\vec{N}.\vec{V}_v),$$

soit

$$\vec{N}_v.\vec{V}_u - \vec{N}_u.\vec{V}_v = 0.$$

La congruence (D) *associée à* (N, $\vec{V}$) *doit être une congruence normale.*

Supposons donc (D) normale. Supposons de plus, pour simplifier que (D) soit rapportée à l'une de ses surfaces orthogonales (S'_1) et soit (N, $\vec{V}_1$) la transformation correspondante.

Pour obtenir l'extrémité de la vitesse V de la transformation cherchée il suffit de porter sur le rayon D, à partir de V_1 une longueur l telle que

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\vec{V}.\vec{N} \\ &= (d\vec{V}_1 + l\,d\vec{N} + dl\,\vec{N}).\vec{N} \\ &= dl. \end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma_1}{2} + l$$

on doit avoir

$$dl = -d\sigma_1$$

ou

$$l = -\sigma_1 + k$$

k étant une constante.

Par suite :

L'hodographe de la transformation cherchée se détermine de la manière la plus générale en prenant, sur chaque rayon D *d'une congruence normale quelconque* (D) *le symétrique, par rapport au point central (situé sur le rayon* D), *du point où ce rayon perce une quelconque des trajectoires orthogonales des droites de la congruence.*

Les transformations dont l'hodographe est déterminé par la construction ci-dessus possèdent une propriété remarquable tirée de l'équation

$$2d\vec{V}.\vec{N} - d\vec{U}.\vec{N} = 0$$

qui les définit.

En effet cette équation peut encore s'écrire :

$$d\sigma + \vec{U} . d\vec{N} = 0$$

Pour $d\sigma = 0$, dN est donc dirigé suivant la projection orthogonale du tourbillon sur le plan tangent et puisque $\omega = 0$, suivant le tourbillon même.

Pour toute transformation infinitésimale de la sphère, pour laquelle l'extrémité du vecteur $\vec{V} - \frac{\vec{U}}{2}$ *est le point caractéristique de l'enveloppée moyenne de la congruence associée, les lignes le long desquelles la dilatation superficielle est constante et les lignes intégrales du champ des tourbillons sont confondues.*

Un cas remarquable parmi les transformations précédentes est celui pour lequel l'enveloppée moyenne de la congruence associée (D) se réduit à un point, c'est-à-dire celui où (D) est une congruence normale d'APPELL.

On a alors (à une constante vectorielle près)

$$\vec{V} = \frac{\vec{U}}{2}$$

Pour de telles transformations, on a en tout point de (S) égalité du vecteur vitesse et du demi-vecteur de variation superficielle. Le tourbillon se déduit de la vitesse par projection orthogonale et rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le plan tangent à (S).

Considérons parmi les transformations définies ci-dessus celles qui correspondent par exemple aux congruences d'APPELL de révolution. La représentation paramétrique de la sphère (S) étant définie par les équations :

$$x = \sin\theta\cos\varphi$$

$$y = \sin\theta\sin\varphi$$

$$z = \cos\theta$$

les expressions en fonction de φ et θ des coordonnées des points de la surface moyenne sont[1]

$$x_0' = -a\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - b\cot g\theta\cos\varphi$$

$$y_0' = a\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} - b\cot g\theta\sin\varphi$$

$$z_0' = b$$

(1) P. VINCENSINI *"Sur trois types de congruence rectiligne"* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse-1927.

Les surfaces normales aux rayons de la congruence sont définies par les équations

$$x_1' = x_0' + \rho \sin\theta\cos\varphi$$
$$y_1' = y_0' + \rho \sin\theta\sin\varphi$$
$$z_1' = z_0' + \rho\cos\theta$$

où

$$\rho = a\varphi - b\,\mathrm{Log}\left|\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right| + c$$

(c constante arbitraire)

On déduit, des relations ci-dessus, les composantes de la vitesse $\vec{V}$ attachée au point N de la sphère (S), dans toute transformation du type considérée associée à une congruence d'APPELL de révolution :

$$x' = -a\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - b\,\mathrm{cotg}\theta\cos\varphi - (a\varphi - b\,\mathrm{Log}\left|\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right| + c)\sin\theta\cos\varphi$$

$$y' = -a\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} - b\,\mathrm{cotg}\theta\sin\varphi - (a\varphi - b\,\mathrm{Log}\left|\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right| + c)\sin\theta\sin\varphi$$

$$z' = b - (a\varphi - b\,\mathrm{Log}\left|\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right| + c)\cos\theta$$

IV. – Transformations pour lesquelles la vitesse $\vec{V}$ est égale au vecteur de variation superficielle.

23. Nous allons déterminer les transformations infinitésimales de (S) pour lesquelles la vitesse est égale au vecteur de variation superficielle $\vec{U}$.

Supposons donc que (N, $\vec{V}$) soit telle que

$$\vec{V} - \vec{U} = 0. \qquad (1)$$

En multipliant scalairement les deux membres de l'égalité précédente respectivement par $\vec{N}_u$, $\vec{N}_v$, on obtient

$$\vec{V}.\vec{N}_u - \vec{U}.\vec{N}_u = \vec{V}.\vec{N}_u + \vec{V}_u.\vec{N} = 0,$$
$$\vec{V}.\vec{N}_v - \vec{U}.\vec{N}_v = \vec{V}.\vec{N}_v + \vec{V}_v.\vec{N} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\vec{V}.\vec{N} = \mathrm{Cte}$$

La projection orthogonale de la vitesse sur la normale à (S) *doit être constante.*

En multipliant scalairement les deux membres de (1) par $\vec{N}$ on obtient

$$\vec{N}.\vec{V} - \sigma = 0,$$

d'où

$$\sigma = \mathrm{Cte}$$

et

$$\vec{N}.\vec{V} - \frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma}{2} = \mathrm{Cte}$$

Or la différence $\vec{N}.\vec{V} - \frac{\sigma}{2}$ est égale à la mesure (algébrique) du segment qui sépare le pied K de la perpendiculaire abaissée de l'origine O de l'hodographe sur le rayon D du point central de (D) situé sur ce rayon. L'enveloppée moyenne de la congruence (D) est donc une sphère de centre O, et le point V est le symétrique de K par rapport au point central.

On est donc ramené au problème déjà cité de la détermination des congruences à enveloppée moyenne sphérique.

Ainsi

Pour obtenir la transformation infinitésimale de la sphère (S) *la plus générale telle que la vitesse* $\vec{V}$ *soit égale au vecteur* $\vec{U}$ *de variation superficielle, il suffit d'envisager la congruence* (D) *la plus générale admettant pour enveloppée moyenne une sphère* (E) *et de prendre pour vitesse relative au point* N *de la sphère* (S), *le vecteur déterminé par le centre* O *de* (E) *et par le symétrique, par rapport au point central du rayon* D *d'image sphérique* N, *de la projection orthogonale de* O *sur* D.

La surface moyenne de la congruence à enveloppée moyenne sphérique la plus générale est définie par la formule de M. VINCENSINI :

$$\vec{V}_0 = -\frac{1}{H}\left[\frac{\partial \phi}{\partial v} + k\int H\,du\right]\vec{N}_u + \frac{1}{H}\left[\frac{\partial \phi}{\partial u} - k\int H\,dv\right]\vec{N}_v + k\vec{N}$$

dans laquelle k est le rayon de la sphère enveloppe du plan moyen et ϕ une fonction arbitraire de u et v.

On obtient l'expression de la vitesse $\vec{V}$ de la transformation infinitésimale cherchée en ajoutant un second membre de l'équation précédente le vecteur $k\vec{N}$:

$$\vec{V} = -\frac{1}{H}\left[\frac{\partial \phi}{\partial v} + k\int H\,du\right]\vec{N}_u + \frac{1}{H}\left[\frac{\partial \phi}{\partial u} - k\int H\,dv\right]\vec{N}_v + 2k\vec{N}$$

En reprenant l'équation de la surface moyenne des congruences à enveloppée moyenne sphérique de révolution, on obtient l'expression de la vitesse des transformations de (S) pour lesquelles l'hodographe est de révolution. Des formules du n° 20, on déduit les composantes X, Y, Z de la vitesse $\vec{V}$:

$$X = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(2 + h\cos\theta)$$

$$Y = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(2 + h\cos\theta)$$

$$Z = -h$$

L'hodographe est le plan de cote $-h$ (h étant une constante arbitraire). les formules ci-dessus établissent donc entre le plan de cote $-h$

et la sphère

$$X=\cos\varphi\sin\theta$$

$$Y=\sin\varphi\sin\theta$$

$$Z=\cos\theta$$

une correspondance telle que, pour la transformation (N, $\vec{V}$) associée, la vitesse $\vec{V}$ est égale au vecteur de variation superficielle.

V. - Transformation T(O, α) des transformations infinitésimales de la sphère

24. Rappelons la définition de la transformation T(O, α) de M. P. VINCENSINI :

(D) étant une congruence quelconque, on fait tourner chacun de ses rayons D autour de sa parallèle Δ issue d'un point fixe O de l'espace, d'un angle déterminé α, dans un sens déterminé. D vient en D_α et l'ensemble des droites D_α constitue une congruence (D_α) transformée de (D) par la transformation T(O,α).

Soient I le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur D et K le point correspondant du rayon D_α transformé de D.

Désignons par λ et λ_α les abscisses des points centraux relatifs à D et D_α, mesurées à partir de I et K, et par p et p_α les paramètres moyens des congruences D et D_α. L'étude de la transformation T(O, α) conduit aux formules suivantes :

$$2\lambda_\alpha = 2\lambda\cos\alpha+p\sin\alpha, \tag{1}$$

$$p_\alpha=-2\lambda\sin\alpha+p\cos\alpha,$$

qui permettent de déduire les éléments de (D_α) (considérée comme rapportée à la surface lieu des points K) des éléments de (D) (considérée comme rapportée à la surface lieu des points I).

Nous appellerons transformée T(O, α) d'une transformation infinitésimale de la sphère (S), (N, $\vec{V}$) (associée à la congruence (D)), la transformation (N, $\vec{V}_\alpha$) obtenue en faisant tourner la vitesse $\vec{V}$ autour du rayon ON de (S) d'un angle déterminé α, dans un sens déterminé.

On a

$$\vec{V}_\alpha=\vec{V}\cos\alpha+\vec{N}\wedge\vec{V}\sin\alpha+\vec{N}.\vec{V}(1-\cos\alpha)\vec{N}$$

Affectons de l'indice α les éléments de la transformation (N, $\vec{V}_\alpha$). On obtient sans difficulté :

$$\vec{U}_\alpha=\vec{V}_\alpha+\vec{U}-\vec{V}-2\vec{N}\left[-\omega\sin\alpha+(\vec{N}.\vec{V}-\frac{\sigma}{2})(1-\cos\alpha)\right] \tag{2}$$

$$\vec{T}_\alpha=\vec{T}-\vec{N}\left[\omega(1-\cos\alpha)+(\vec{N}.\vec{V}-\frac{\sigma}{2})\sin\alpha\right] \tag{3}$$

En projetant les égalités précédentes sur la normale à (S), on obtient :

$$\sigma_\alpha = \sigma\cos\alpha - 2\omega\sin\alpha + 2\vec{N}.\vec{V}(1-\cos\alpha), \tag{4}$$

$$\omega_\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin\alpha + \omega\cos\alpha - \vec{N}.\vec{V}\sin\alpha.$$

Si l'on suppose la vitesse $\vec{V}$ normale à $\vec{N}$, on a $\vec{OI}=\vec{V}$. Le transformé par T(O, α), $\vec{V}_\alpha$, du vecteur $\vec{V}$ est égal à $\vec{OK}$. Les formules (4) redonnent bien en remplaçant σ, σ_α, 2ω, $2\omega_\alpha$, respectivement par -2λ, $-2\lambda_\alpha$, ρ, ρ_α les formules (1) de M. VINCENSINI.

Soit (N, $\vec{V}$) une quelconque des transformations infinitésimales de (S) associées à (D), et désignons par d la mesure (algébrique) du segment qui sépare le pied I de la perpendiculaire abaissée de O sur le rayon D du point central de (D) relatif à D.

$$d = \vec{N}.(\vec{V} - \frac{\sigma}{2}\vec{N}) = \vec{N}.\vec{V} - \frac{\sigma}{2}.$$

Les formules (2) et (3) peuvent se mettre sous la forme :

$$(\vec{V}-\vec{U}) - (\vec{V}_\alpha - \vec{U}_\alpha) = 2\vec{N}\,[d - (\omega\sin\alpha + d\cos\alpha)], \tag{5}$$

$$\vec{T} - \vec{T}_\alpha = \vec{N}(\omega - \omega\cos\alpha + d\sin\alpha). \tag{6}$$

Par suite

Les différences respectives des vecteurs $\vec{V}-\vec{U}$ *et* $\vec{T}$, *et de leurs transformés par* T(O, α) *sont, relativement à toutes les transformations infinitésimales de* (S) *associées à la congruence* (D), *des invariants qui ne dépendent que de* α.

Les formules (4) peuvent être mise sous la forme suivante :

$$\sigma_\alpha = 2\,[-(d\cos\alpha + \omega\sin\alpha) + \vec{N}.\vec{V}]$$
$$\omega_\alpha = \omega\cos\alpha - d\sin\alpha. \tag{7}$$

Si $d=0$ et $\omega=0$ la congruence (D) est une congruence d'APPELL. Les formules (5) et (6) montrent que dans ce cas les vecteurs $\vec{V}-\vec{U}$ et $\vec{T}$ demeurent invariants dans la transformation T(O, α). Ces deux propriétés cinématiques, caractéristiques l'une et l'autre des transformations infinitésimales de (S) associées aux congruences d'APPELL, sont à rapprocher de la propriété géométrique suivant laquelle les congruences d'APPELL conservent leur définition dans une transformation T(O, α). En effet cette dernière propriété qui, en supposant (D) rapportée à sa surface moyenne, se déduit immédiatement des formules (1), peut être interprétée, par les formules (7), comme traduisant l'invariance dans

la transformation T(O, α) des projections des vecteurs $\vec{V}$-$\vec{U}$ et $\vec{T}$ sur la normale à (S).

Supposons que la congruence (D) soit à enveloppée moyenne sphérique et désignons par k le rayon de la sphère enveloppe du plan moyen. Si V est le symétrique par rapport au point central du pied I de la perpendiculaire abaissée de O sur D on a

$$\vec{V}-\vec{U}=0$$

comme il a été vu précédemment et la formule (6) devient :

$$V_\alpha - U_\alpha = 2N\left[\omega \sin\alpha - k(1-\cos\alpha)\right].$$

$\vec{V}_\alpha$ ne diffère de $\vec{U}$ que par un vecteur colinéaire à $\vec{N}$.
Les formules (4) donnent alors puisque

$$\vec{N}.\vec{V}=\sigma=2k,$$

$$\sigma_\alpha = 2\left[\omega \sin\alpha + k(2-\cos\alpha)\right]$$

$$\omega_\alpha = \omega\cos\alpha - k\sin\alpha$$

et en éliminant ω entre ces deux équations on obtient :

$$\sigma_\alpha \cos\alpha + 2\omega_\alpha \sin\alpha = 2k(2\cos\alpha - 1)$$

Pour obtenir une transformation infinitésimale de (S) telle qu'il existe une relation linéaire (à coefficients indépendants de u et v) liant la rotation moyenne ω et la dilatation superficielle σ, il suffit donc de considérer une quelconque des transformées par T(O, α) d'une transformation de (S) pour laquelle la vitesse $\vec{V}$ est égale à la variation superficielle $\vec{U}$.

VI. - Transformations infinitésimales conformes de la sphère.

25. La congruence associée à toute transformation infinitésimale conforme de la sphère (S) est, comme on peut facilement le vérifier, une congruence isotrope.

En effet, soit (N, $\vec{V}$) une transformation infinitésimale conforme de (S), (D) sa congruence associée. Coupons (D) par une surface quelconque (S_l). La transformation infinitésimale correspondante (N, $\vec{V}_l$) est aussi conforme puisque la rotation de l'élément $d\vec{N}$ de (S) ne dépend pas de la surface (S_l). Si (N, $\vec{V}_l$) est conforme, la dilatation élémentaire est constante (indépendante de du, dv) pour tout élément unitaire $\frac{d\vec{N}}{ds}$ de (S) au point N, et égale à la demi-dilatation superficielle. La transformation (N, $\vec{V}_0$) qui correspond à la surface moyenne de (D) est donc une déformation puisque, dans ce cas, la dilatation superficielle est nulle. Or on sait que l'hodographe de toute déformation infinitésimale de (S) est la surface moyenne d'une congruence isotrope d'image (S).

Nous avons vu d'autre part (n° 20) que l'hodographe des vitesses d'une transformation infinitésimale de (S) en elle même à dilatation superfi-

cielle nulle en chaque point est la surface moyenne d'une congruence d'APPELL généralisée (D). Pour que la transformation soit en plus à rotation moyenne ω nulle il suffit que la congruence associée (D) soit en plus normale, et se réduise par suite à une congruence d'APPELL.

Or une transformation due à M. VINCENSINI[1] permet de déduire toute congruence d'APPELL d'une congruence isotrope (ou réciproquement).

La transformation de M. VINCENSINI consiste à abaisser d'un point quelconque O de l'espace, les perpendiculaires aux différents rayons d'une congruence isotrope quelconque (D), et à faire subir à la surface (S) lieu de leurs pieds une inversion de pôle O (de puissance quelconque). En menant ensuite par chaque point de la surface obtenue une parallèle au rayon de (D) passant par le point correspondant de (S) on obtient une congruence (D_1) ; cette congruence est une congruence d'APPELL, d'enveloppée moyenne le point O.

L'interprétation cinématique de la construction ci-dessus est la suivante. Si l'on fait subir à l'hodographe des vitesses d'une transformation infinitésimale conforme d'une sphère (S) en elle même, une inversion dont le pôle est l'origine O de l'hodographe, on obtient l'hodographe des vitesses d'une transformation infinitésimale de la sphère (S) en elle même à dilatation superficielle et rotation moyenne nulles.

Nous démontrerons dans la dernière partie (n° 39 et 40) que cette proposition s'applique non seulement à la sphère mais à une surface quelconque. Nous allons cependant la démontrer pour la sphère (par une démonstration différente de celle qui sera utilisée par la suite) et retrouver ainsi le théorème de M. VINCENSINI.

26. Si $(N, \vec{V})$ est une transformation infinitésimale de (S) en elle même, la vitesse $\vec{V}$ est perpendiculaire pour chaque point de (S) au rayon vecteur qui joint le centre de la sphère au point N.

Considérons les transformations infinitésimales $(M, \vec{V})$ d'une surface (S) quelconque, telles que la vitesse $\vec{V}$ soit perpendiculaire au rayon vecteur qui joint l'origine O de l'espace au point M auquel $\vec{V}$ est appliqué.

Nous allons établir les expressions de la rotation moyenne ω_1 et de la dilatation superficielle σ_1 de la transformation infinitésimale de (S) que l'on obtient après avoir fait subir à l'hodographe (S') de toute transformation $(M, \vec{V})$ définie comme ci-dessus une inversion de pôle O (origine de l'hodographe) et de puissance un.

Soit $\vec{V}_1$ le vecteur correspondant à $\vec{V}$ après inversion de l'hodographe (S').

On a

$$\vec{V}_1 = \frac{\vec{V}}{\vec{V}^2}$$

d'où

$$\vec{V}_{1u} = \vec{V}_u \frac{1}{\vec{V}^2} - 2\,(\vec{V}_u \cdot \vec{V})\,\frac{\vec{V}}{[\vec{V}^2]^2}\,.$$

(1) *"Sur une relation entre les congruences isotropes et les congruences d'APPELL".* Bull. Sc. Math. 1945.

Par suite

$$\vec{M}_v \cdot \vec{V}_{1u} = \frac{1}{\vec{V}^2}\left[\vec{M}_v \cdot \vec{V}_u - \frac{2}{\vec{V}^2}(\vec{V}_u \cdot \vec{V})(\vec{V} \cdot \vec{M}_v)\right].$$

De la relation

$$\vec{M} \cdot \vec{V} = 0,$$

on déduit

$$\vec{M}_v \cdot \vec{V} + \vec{V}_v \cdot \vec{M} = 0,$$

d'où

$$\vec{M}_v \cdot \vec{V}_{1u} = \frac{1}{\vec{V}^2}\left[\vec{M}_v \cdot \vec{V}_u + \frac{2}{\vec{V}^2}(\vec{V}_u \cdot \vec{V})(\vec{V}_v \cdot \vec{M})\right].$$

On aura de même

$$\vec{M}_u \cdot \vec{V}_{1v} = \frac{1}{\vec{V}^2}\left[\vec{M}_u \cdot \vec{V}_v + \frac{2}{\vec{V}^2}(\vec{V}_v \cdot \vec{V})(\vec{V}_u \cdot \vec{M})\right].$$

Retranchons membre à membre les deux équations précédentes. En remarquant que

$$(\vec{V}_u \cdot \vec{V})(\vec{V}_v \cdot \vec{M}) - (\vec{V}_v \cdot \vec{V})(\vec{V}_u \cdot \vec{M}) = \vec{V}_u \wedge \vec{V}_v \cdot \vec{V} \wedge \vec{M},$$

en divisant les deux membres de l'équation obtenue par H et en posant $\frac{H'}{H} = h$, on obtient l'expression suivante de ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{1}{\vec{V}^2}\left[\omega + \frac{h}{\vec{V}^2}(\vec{N}', \vec{V}, \vec{M})\right]. \tag{1}$$

Calculons maintenant l'expression du vecteur de variation superficielle $\vec{U}_1$ de la transformation $(M, \vec{V}_1)$. On a :

$$\vec{M}_u \wedge \vec{V}_{1v} = \frac{1}{\vec{V}^2}\left[\vec{M}_u \wedge \vec{V}_v - \frac{2}{\vec{V}^2}\vec{M}_u \wedge \vec{V}(\vec{V}_u \cdot \vec{V})\right].$$

En ajoutant au second membre le vecteur nul

$$\frac{\vec{V}}{\vec{V}^2} \wedge \vec{V}_u(\vec{M}_u \cdot \vec{V} + \vec{V}_u \cdot \vec{M}),$$

et en considérant l'expression analogue du vecteur $\vec{V}_{1u} \wedge \vec{M}_v$, on obtient, après calculs :

$$\vec{U}_1 = \frac{1}{\vec{V}^2}\left[-\vec{U} + \frac{2}{\vec{V}^2}(\vec{U} \wedge \vec{V} + h\vec{N} \wedge \vec{M}) \wedge \vec{V}\right],$$

ou encore

$$\vec{U}_1 = \frac{1}{\vec{V}^2}\left[-\vec{U} + \frac{2\vec{V}}{\vec{V}^2}(\vec{U} \cdot \vec{V}) + \frac{2h}{\vec{V}^2}(\vec{N}' \cdot \vec{V})\vec{M}\right].$$

Par suite :

$$\sigma_1 = \frac{1}{\vec{V}^2}\left[-\sigma + \frac{2}{\vec{V}^2}(\vec{U} \cdot \vec{V})(\vec{V} \cdot \vec{N}) + \frac{2h}{\vec{V}^2}(\vec{N}' \cdot \vec{V})(\vec{N} \cdot \vec{M})\right] \tag{2}$$

Si (S) est une sphère, les formules (1) et (2) deviennent :

$$\omega_1 = \frac{1}{\vec{V}^2}\left[\omega - \frac{h}{\vec{V}^2}(\vec{N}'.\vec{N}\wedge\vec{V})\right], \tag{3}$$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{\vec{V}^2}\left[\sigma - \frac{2h}{\vec{V}^2}(\vec{N}'.\vec{V})\right]. \tag{4}$$

27. Les formules de transformation, dans l'inversion de l'hodographe de ω et σ étant ainsi établies, proposons nous de déterminer les transformations infinitésimales de la sphère (S) en elle même, telles que le réseau (R), formé par les lignes intégrales du champ des vitesses et leurs trajectoires orthogonales, coïncide avec le réseau des lignes de (S) tangentes en chaque point aux directions principales de dilatation linéaire.

Supposons la sphère (S) rapportée au réseau (R), $\vec{V}$ étant, par exemple, dirigée en chaque point suivant la direction tangente à la courbe v = Cte.

On peut poser alors

$$\vec{N}_u = \lambda\vec{V}.$$

On a

$$F = 0, \qquad \vec{N}.\vec{V} = 0.$$

Pour exprimer la coïncidence du réseau formé par les lignes coordonnées avec le réseau des directions principales de dilatation linéaire, écrivons la nullité de la déformation de l'angle (droit) formé par les vecteurs $\vec{N}_u$ et $\vec{N}_v$:

$$\vec{N}_u.\vec{V}_v + \vec{N}_v.\vec{V}_u = 0$$

ou

$$\omega = \frac{1}{H}\vec{N}_v.\vec{V}_u = -\frac{1}{H}\vec{N}_u.\vec{V}_v$$

Le vecteur de variation $\vec{U}$ étant visiblement situé dans le plan formé par les vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{N}_u$ on peut écrire

$$\vec{U} = (\vec{U}.\vec{N})\vec{N} + \frac{1}{E}(\vec{U}.\vec{N}_u)\vec{N}_u.$$

De cette équation, de la relation

$$\vec{U}.\vec{V}_v + h\vec{N}'.\vec{M}_v = 0$$

établie au premier chapitre, et de l'égalité de $\vec{V}$ et de la projection orthogonale de $\vec{U}$ sur le plan tangent on déduit

$$\vec{U}.\vec{V}_v = -h\vec{N}'.\vec{N}_v$$

et

$$\vec{U}.\vec{V}_v = -\frac{1}{E}(\vec{U}.\vec{N}_u)(\vec{N}_u.\vec{V}_v),$$

$$= -\frac{\omega H}{E}\vec{V}.\vec{N}_u,$$

$$= -\lambda\omega\frac{H}{E}\vec{V}^2.$$

Par suite

$$\omega = \frac{hE}{\lambda H\vec{V}^2}\vec{N}'.\vec{N}_v$$

Comme,

$$\vec{N}_v = \frac{H}{E}\vec{N}\wedge\vec{N}_u = \lambda\frac{H}{E}\vec{N}\wedge\vec{V},$$

on obtient finalement

$$\omega = \frac{h}{\vec{V}^2}\vec{N}'.\vec{N}\wedge\vec{V}.$$

Compte tenu de l'équation (1), on peut donc dire que si l'on fait subir à l'hodographe de la transformation (N, $\vec{V}$) une inversion de pôle O, on obtient une transformation de (S) en elle même à rotation moyenne nulle, et réciproquement.

Les transformations infinitésimales cherchées peuvent donc s'obtenir par la construction suivante :

On se donne une congruence (D) *normale de même image sphérique que la sphère à transformer et on abaisse d'un point* O *quelconque de l'espace les perpendiculaires aux différents rayons* D *de* (D). *On fait ensuite subir à la surface lieu de leurs pieds,* P, *une inversion de pôle* O *et on prend pour vitesse relative au point* N *de* (S) *image du rayon* D *le vecteur qui joint* O *à l'inverse* V *du point* P.

Proposons nous maintenant de déterminer les transformations infinitésimales de la sphère (S) en elle même, telles que le réseau (R) coïncide avec le réseau des lignes de (S) tangentes en chaque point aux directions principales de rotation.

Ce dernier réseau est, on le sait, bissecteur de celui des directions principales de dilatation linéaire.

En supposant la sphère rapportée au réseau (R) comme précédemment, on doit avoir cette fois

$$\vec{N}\wedge\vec{N}_u.\vec{V}_v + \vec{N}\wedge\vec{N}_v.\vec{V}_u = 0,$$

ou

$$\sigma = \frac{2}{H}\vec{N}\wedge\vec{N}_u.\vec{V}_v = -\frac{2}{H}\vec{N}\wedge\vec{N}_v.\vec{V}_u.$$

Des égalités

$$\vec{U}.\vec{V}_u = -h\vec{N}'.\vec{N}_u,$$

et

$$\vec{U}.\vec{V}_u = (\vec{U}.\vec{N})(\vec{N}.\vec{V}_u) + \frac{1}{E}(\vec{U}.\vec{N}_u)(\vec{N}_u.\vec{V}_u),$$

$$= -\sigma(\vec{U}.\vec{N}_u) - \frac{1}{H}(\vec{U}.\vec{N}_u)\vec{N}\wedge\vec{N}_v.\vec{V}_u,$$

$$= -\frac{\sigma}{2}\vec{V}.\vec{N}_u,$$

on déduit

$$\sigma\vec{V}.\vec{N}_u = 2h\vec{N}'.\vec{N}_u,$$

et finalement

$$\sigma = \frac{2h}{\vec{V}^2}\vec{N}.\vec{V}.$$

Compte tenu de l'équation (2), on peut donc dire que si l'on fait subir à l'hodographe de la transformation (N, $\vec{V}$) une inversion de pôle O, on obtient une transformation de (S) en elle même à dilatation superficielle nulle en chaque point, et réciproquement.

*On obtiendra donc l'hodographe des transformations cherchées en abaissant du point enveloppe O d'une congruence d'*APPELL *généralisée* (D) *d'image* (S), *les perpendiculaires aux différents rayons et en faisant subir à la surface lieu de leurs pieds une inversion de pôle* O.

Les remarques précédentes démontrent immédiatement la proposition, déduite au n° 25 du théorème de M. VINCENSINI, par laquelle on peut passer par inversion de l'hodographe, d'une transformation infinitésimale de (S) en elle même à rotation moyenne et dilatation superficielle nulle, à une transformation infinitésimale conforme de (S) en elle même.

En effet, si une transformation infinitésimale de (S) en elle même est à la fois à rotation moyenne et dilatation superficielle nulles, et si l'on fait subir à son hodographe une inversion dont le pôle est l'origine O de celui-ci, on obtient, d'après ce qui précède, une transformation de (S) telle que le réseau (R) formé par les lignes intégrales du champ des vitesses et leurs trajectoires orthogonales, soit confondu avec le réseau des dilatations linéaires principales et le réseau des rotations principales. Comme ces deux réseaux se bissectent (n° 2), sauf dans le cas des transformations infinitésimales conformes (pour lequel ils sont indéterminés), la transformation obtenue est nécessairement conforme.

TROISIEME PARTIE

I. – Congruence associée à une transformation d'une surface quelconque.

28. Soit $(M, \vec{V})$ une transformation infinitésimale d'une surface (S) quelconque. Effectuons la construction suivante. A partir du point V de l'hodographe (S'), portons sur la parallèle D à la normale en M à (S), une longueur l, fonction continue et uniforme du point M.

Quand M décrit la surface (S), le point $V_l = V + l\vec{N}$ décrit aussi une surface, (S_l), que l'on peut prendre comme hodographe d'une nouvelle transformation, $(M, \vec{V}_l)$ de (S).

Si on fait varier l de toutes les manières possibles, on obtient une famille de transformations infinitésimales de (S) qui possèdent toutes la même rotation moyenne ω au point M.

Calculons le tourbillon $\vec{T}_l$ de $(M, \vec{V}_l)$:

$$\vec{T}_l = \frac{1}{2H}\left[(\vec{N}\wedge\vec{M}_u)\wedge(\vec{V}_v + \frac{\partial l}{\partial v}\vec{N} + l\vec{N}_v) + (\vec{V}_u + \frac{\partial l}{\partial u}\vec{N} + l\vec{N}_u)\wedge(\vec{N}\wedge\vec{M}_v)\right]$$

$$= \vec{T} + \frac{1}{2H}\left(\frac{\partial l}{\partial v}\vec{M}_u - \frac{\partial l}{\partial u}\vec{M}_v\right)$$

ou

$$\vec{T}_l = \vec{T} - \frac{\vec{N}}{2}\wedge\overrightarrow{\mathrm{grad}_M\, l}.$$

On a bien

$$\omega_l = \omega.$$

Pour calculer le vecteur de variation superficielle $\vec{U}_l$ de $(M, \vec{V}_l)$, supposons (S) rapportée au système (u, v) de ses lignes de courbure. On a :

$$\vec{U}_l = \frac{1}{H}\left[\vec{M}_u\wedge(\vec{V}_v + \frac{\partial l}{\partial v}\vec{N} + l\vec{N}_v) + (\vec{V}_u + \frac{\partial l}{\partial u}\vec{N} + l\vec{N}_u)\wedge\vec{M}_v\right]$$

$$= \vec{U} - l\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\vec{N} - \frac{\vec{N}}{H}\wedge\left(\frac{\partial l}{\partial u}\vec{M}_v - \frac{\partial l}{\partial v}\vec{M}_u\right)$$

$$= \vec{U} - l\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\vec{N} - \overrightarrow{\mathrm{grad}_M\, l}$$

Bien que l'on ait supposé pour l'établir que (S) était rapportée à ses lignes de courbure, l'expression finale de $\vec{U}_l$ est indépendante du paramétrage de (S).

On déduit de la formule ci-dessus l'expression de la dilatation superficielle σ_l de $(M, \vec{V}_l)$

$$\sigma_l = \sigma - l\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Si la surface (S) est minima, toutes les transformations $(M, \vec{V}_l)$ ont même dilatation superficielle σ_l.

Supposons (S) non minima et prenons, en chaque point M, l égal au produit de la demi-dilatation superficielle $\frac{\sigma}{2}$ de $(M, \vec{V})$ par la courbure moyenne de (S) en M :

$$l = \frac{\sigma}{4}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Désignons par $\vec{V}_o$ le vecteur

$$\vec{V}_o = \vec{V} + \frac{\sigma}{4}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\vec{N}$$

La transformation infinitésimale $(M, \vec{V}_o)$ est à dilatation superficielle nulle.

En considérant la transformation infinitésimale $(M, \vec{V})$ de (S) la plus générale on obtient donc, par la construction ci-dessus du vecteur $\vec{V}_o$, la transformation infinitésimale de (S) à dilatation superficielle nulle la plus générale.

On vérifie aisément que si l'on substitue à l'hodographe (S') de $(M, \vec{V})$ une surface quelconque coupant la congruence (D) des droites D précédemment définies à partir des points de (S'), la construction ci-dessus redonne pour chaque point M le même vecteur $\vec{V}_o$. En d'autres termes celui-ci dépend de la congruence (D) et non de sa surface de départ.

II. - Transformation infinitésimale de l'image sphérique d'une surface (S).

29. Soient (S) une surface quelconque non développable, $(M, \vec{V})$ une transformation infinitésimale quelconque de (S).

Dans la transformation infinitésimale qui change (S) en sa transformée (S_1), l'image sphérique (Σ_1) de (S_1) peut être considérée comme une transformée infinitésimale de l'image sphérique (Σ) de (S).

Soit N_1 le point de (Σ_1) correspondant au point N de (Σ) image du point M de (S) ; on peut poser :

$$\vec{N}_1 = \vec{N} + \varepsilon\vec{\xi}$$

Le vecteur $\vec{\xi}$, vitesse du point N dans la transformation infinitésimale définie par l'équation ci-dessus, n'est autre que la projection

orthogonale du vecteur de variation superficielle $\vec{U}$ sur le plan tangent en M à (S). On a donc

$$\vec{\xi} = 2\vec{T}\wedge\vec{N}$$

Recherche des lignes intégrales du champ (N, $2\vec{T}\wedge\vec{N}$). La recherche des lignes intégrales du champ des vitesses $2\vec{T}\wedge\vec{N}$ des points N de la sphère (Σ) peut être faite de la manière suivante.
On considère le champ (M, $2\vec{T}\wedge\vec{N}$) formé par les vecteurs $2\vec{T}\wedge\vec{N}$ considérés comme fonction des points M de (S). Comme on l'a vu dans la première partie, les lignes intégrales (C) de ce champ sont les trajectoires orthogonales des lignes (C_1) de (S) homologues des lignes de (S') tangentes en chaque point à la direction parallèle à l'intersection des plans tangents en M et V à (S) et (S') et d'équation différentielle

$$\vec{N}.\vec{V}_u\,du+\vec{N}.\vec{V}_v\,dv=0.$$

Les lignes (C) ayant été déterminées, on est ensuite ramené à la recherche de leur représentation sur la sphère (Σ).

Remarque sur les lignes intégrales du champ (M, $2\vec{T}\wedge\vec{N}$). La considération de certains mouvements des milieux à trois dimensions permet de donner aux lignes intégrales (C) du champ (M, $2\vec{T}\wedge\vec{N}$) une interprétation cinématique intéressante.

Considérons les mouvements des milieux à trois dimensions pour lesquels la congruence des lignes de tourbillon admet une famille de surfaces orthogonales. Soient (S) l'une quelconque des surfaces de la famille, M son point courant, $\vec{T}$ le tourbillon en M (au sens de BURALI-FORTI) du mouvement que subit la surface (S). Désignons par M^* le point du milieu à trois dimensions, auquel appartient (S), situé à une distance infiniment petite dl de M sur la normale à (S) en ce point. Soit $\vec{\nu}\,dl$ la différence des vitesses des points M^* et M. La projection orthogonale $\vec{\nu}_t dl$ de $\vec{\nu}dl$ sur le plan tangent en M à (S) peut être considérée comme la vitesse de glissement du point M^* sur la surface (S). En reprenant la formule (1) du n° 2, on a

$$\overrightarrow{rotV} = 2\vec{T}+\vec{N}\wedge\vec{\nu}_t,$$

d'où

$$\overrightarrow{rotV}\wedge\vec{N} = 2\vec{T}\wedge\vec{N}+\vec{\nu}_t.$$

Comme $\overrightarrow{rotV}$ est colinéaire en M à la normale à (S) on déduit de la relation ci-dessus

$$2\vec{T}\wedge\vec{N} = -\vec{\nu}_t.$$

Le vecteur $2\vec{T}\wedge\vec{N}$ est égal et opposé (à un facteur infiniment petit près égal à la mesure de la distance qui sépare M et M^*) à la vitesse de glissement du point M^* sur la surface (S).

Les lignes intégrales (C) du champ (M, $2\vec{T}\wedge\vec{N}$) définissent donc les lignes de glissement, sur la surface (S), des points du milieu en mouvement infiniment voisins de cette surface.

La congruence des courbes (C) appartenant à l'ensemble des surfaces (S) orthogonales aux lignes de tourbillon peut être par suite considérée comme définissant les lignes de glissement de chacune de ces surfaces par rapport à sa voisine.

Si le mouvement du milieu à trois dimensions est irrotationnel, la congruence des courbes (C) d'une famille de surfaces quelconques du milieu définit les lignes de glissement de chacune de ces surfaces par rapport à sa voisine.

III. - Enveloppe des plans menés parallèlement aux plans tangents à (S) par les points de l'hodographe.

30. Menons par chacun des points V de (S') correspondants aux points M de (S) le plan P parallèle au plan tangent en M à (S).

L'ensemble des plans (P) admet une enveloppe dont nous nous proposons de déterminer la position du point caractéristique en fonction du vecteur $2\vec{T}\wedge\vec{N}$.

Soit $\vec{\xi}$ le vecteur qui joint le point V au point E où le plan (P) touche son enveloppe.

On a, identiquement en du, dv,

$$d\vec{E}.\vec{N}=d\vec{V}.\vec{N}+d\vec{\xi}.\vec{N}=0.$$

Comme l'on a

$$d\vec{V}.\vec{N}=-2\vec{T}\wedge\vec{N}.d\vec{M},$$

et, puisque $\vec{\xi}.\vec{N}=0$,

$$d\vec{\xi}.\vec{N}=-\vec{\xi}.d\vec{N},$$

on déduit la relation identique en du, dv

$$2\vec{T}\wedge\vec{N}.d\vec{M}+\vec{\xi}.d\vec{N}=0.$$

En supposant (S) rapportée à ses lignes de courbure et en désignant par R_1 et R_2 les rayons de courbure des sections planes normales respectivement tangentes aux lignes v=Cte, u=Cte on obtient :

$$(\vec{\xi}-R_1 2\vec{T}\wedge\vec{N}).\vec{N}_u=0,$$

$$(\vec{\xi}-R_2 2\vec{T}\wedge\vec{N}).\vec{N}_v=0.$$

Le point E se trouve donc à l'intersection des droites menées dans le plan (P) respectivement par les extrémités P_1 et P_2 des deux vecteurs

$$\vec{OP}_1=\vec{V}+R_1 2\vec{T}\wedge\vec{N},$$

$$\vec{OP}_1=\vec{V}+R_2 2\vec{T}\wedge\vec{N},$$

et perpendiculaires, la première à la direction tangente à la ligne de courbure v=Cte, la seconde à la direction tangente à la ligne de courbure u=Cte.

Si l'on substitue à la surface (S) toute autre surface en correspondance avec (S) par parallélisme des plans tangents, l'enveloppe de l'ensemble des plans (P) ne sera évidemment pas modifiée.

Le point E peut donc en particulier s'obtenir en substituant à (S), sa sphère image (Σ).

Considérons la transformation infinitésimale (N, $\vec{V}$) de (Σ) pour laquelle la vitesse du point N est le vecteur $\vec{V}$. En désignant par $\vec{T}_N$ son tourbillon, on aura

$$\vec{E}=\vec{V}-2\vec{T}_N\wedge\vec{N}.$$

Pour tout déplacement infinitésimal $d\vec{M}$ du point M sur (S), le plan (P) subit une variation infinitésimale à laquelle correspond une droite caractéristique Δ. Nous allons déterminer la direction de $d\vec{M}$ pour que Δ passe par le point V.

En désignant par X le point courant du plan (P) toute droite caractéristique Δ de P est définie par le système.

(1) $$(\vec{X}-\vec{V}).\vec{N}=0,$$

(2) $$(\vec{X}-\vec{V}).d\vec{N}-d\vec{V}.\vec{N}=0.$$

Pour que Δ passe par V il faut et il suffit que

(3) $$d\vec{V}.\vec{N}=0,$$

ou encore

$$\vec{N}\wedge 2\vec{T}.d\vec{M}=0.$$

La direction cherchée est donc confondue avec celle de la projection du tourbillon sur le plan tangent à (S).

L'équation (2) devient :

$$(\vec{X}-\vec{V}).d\vec{N}=0.$$

En substituant E à X dans cette équation ce qui est possible puisque toutes les caractéristiques de P passent par le point E on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases}(\vec{E}-\vec{V}).d\vec{N}=0,\\ 2\vec{T}\wedge\vec{N}.d\vec{M}=0.\end{cases}$$

d'où l'on déduit immédiatement que la direction qui joint V au point caractéristique E de l'enveloppe de P est parallèle à la direction conjuguée, sur (S), de la projection du tourbillon $\vec{T}$ sur le plan tangent à (S).

L'égalité des vecteurs $\vec{\xi}=\vec{E}-\vec{V}$ et $-2\vec{T}_N\wedge\vec{N}$ permet de présenter encore proposition ci-dessus sous la forme suivante.

Les lignes tangentes en chaque point de (S) *à la direction de la projection orthogonale sur le plan tangent du tourbillon* $\vec{T}$ *de la transformation* (M, $\vec{V}$) *de* (S) *et les trajectoires orthogonales des lignes tangentes à la direction de même signification dans la transformation* (N, $\vec{V}$) *de la sphère image de* (S), *(de même hodographe que* (M, $\vec{V}$)) *forment sur* (S) *un réseau conjugué.*

Si le vecteur $\vec{V}$ est perpendiculaire à la normale à (S) l'enveloppe du plan (P) est le point O, la direction de la vitesse $\vec{V}$ est donc celle de la droite caractéristique de (P) qui passe par V.
Par suite :

Pour toutes les transformations infinitésimales (M, $\vec{V}$) *de* (S) *en elle même, les lignes intégrales du champ des vitesses et celles du champ des projections du tourbillon sur le plan tangent forment sur* (S) *un réseau conjugué.*

Les remarques précédentes suggèrent immédiatement l'étude du cas particulier intéressant où la direction de $2\vec{T}\wedge\vec{N}$ est direction principale de la surface (S). (S) étant toujours rapportée au système (u, v) de ses lignes de courbure, supposons $2\vec{T}\wedge\vec{N}$ colinéaire par exemple à $\vec{M}_u$.
On a alors, le point E étant confondu avec le point P_1

$$\vec{E} = \vec{V} + R_1\, 2\vec{T}\wedge\vec{N}.$$

On déduit de cette relation

$$2\vec{T}_N\wedge\vec{N} + R_1\, 2\vec{T}\wedge\vec{N} = 0.$$

Les projections des tourbillons des transformations (M, $\vec{V}$) et (N, $\vec{V}$) sur le plan tangent à (S) sont l'une et l'autre colinéaires à une direction principale de (S). Le rapport de leurs modules est égal au rayon de courbure principal, changé de signe, correspondant à l'autre direction principale.

La recherche de transformations infinitésimales réalisant la colinéarité de $2\vec{T}\wedge\vec{N}$ avec une direction principale peut, par exemple, être faite de la manière suivante :

On se donne la surface (S) et une transformation infinitésimale arbitraire (M, $\vec{V}_o$) de (S), et on porte sur la droite menée par le point V_o parallèlement à la normale en M à (S) (rapportée au système (u, v) de ses lignes de courbure) un segment V_oV de longueur l définie par la quadrature :

$$l = -\int \vec{N}.\vec{V}_o\, dv + f(u)$$

La correspondance entre (S) et la surface (S') lieu des points $\vec{V}$ est alors telle que

$$\vec{N}.\vec{V}_v = 0.$$

Par suite, les lignes u=Cte de (S) sont homologues, dans cette correspondance, des lignes de (S') tangentes en chaque point à la direction parallèle à l'intersection des deux plans tangents à (S) et (S'). Les lignes intégrales du champ (M, $2\vec{T}\wedge\vec{N}$) de la transformation (M, $\vec{V}$) sont alors confondues avec les lignes de courbure v=Cte, et (M, $\vec{V}$) est bien la transformation infinitésimale cherchée.

Un autre procédé est le suivant :

On se donne à l'avance l'hodographe (S') et on établit une correspondance arbitraire entre (S') et une sphère (Σ). On détermine sur (Σ) les lignes tangentes en chaque point à la direction homologue de la direction du plan tangent à (S') perpendiculaire à la normale $\vec{N}$ à (Σ). on est ensuite ramené au problème de la détermination d'une surface (S) dont la représentation sphérique des lignes de courbure est donnée.

IV. - Application à un mouvement tourbillonnaire.

31. Soit dans l'espace (E) à trois dimensions, une surface (S) et la congruence (D) de ses normales. Considérons les mouvements de l'ensemble des points de (E) pour lesquels les points situés sur un même rayon D (fonction des paramètres u, v du système des lignes coordonnées de (S)) sont animés de la même vitesse $V(u,v)$.

Soient M le point courant de (S), $\vec{N}$ le vecteur unitaire qui définit le rayon D.

Le tourbillon d'un quelconque des mouvements de (E) précédemment défini est confondu en tout point $M_l = M + l\vec{N}$ de l'espace avec le tourbillon (au sens de BURALI-FORTI) $\vec{T}_l$ de la transformation infinitésimale de la surface (S_l) obtenue en portant sur la normale à (S) une longueur constante égale à la distance l de M_l à la surface (S).

$\vec{T}_l$ peut être exprimé en fonction des tourbillons $\vec{T}$ et $\vec{T}_N$ de la transformation (M, $\vec{V}$) de (S) et de la transformation (N, $\vec{V}$) (de même hodographe) de la sphère image de (S).

Désignons par K et $\frac{1}{R_m}$ les courbures totale et moyenne de (S). On a

$$\vec{T}_l = \frac{\vec{T} + \vec{K}\,l\,\vec{T}_N}{1 - \frac{2l}{R_m} + K l^2}.$$

Un cas particulier intéressant est celui où $\vec{N}$, $\vec{T}$, $\vec{T}_N$ sont coplanaires, car alors le long de la droite D les tourbillons sont dans un même plan (P). Il suffit pour réaliser ce cas, comme nous l'avons vu au n° 30, de construire la correspondance entre (S) et l'hodographe (S') des vecteurs $\vec{V}$ de telle manière qu'une famille des lignes de courbure de (S), la famille u=Cte par exemple si (S) est rapportée à son réseau de courbure, soit homologue de la famille des lignes de (S') tangentes en chaque point à la direction parallèle à l'intersection des plans tangents à (S) et (S'). Le plan (P) est alors le plan principal de (S) relatif à la direction principale tangente à la courbe u=Cte.

Si cette condition est réalisée le mouvement ainsi défini possède en particulier la propriété suivante :

Si on attache à chaque point M un trièdre animé d'une rotation égale au tourbillon $\vec{T}_l$ en M_l, il existe quand on passe du point M_l au point $M_{l'}$, de D infiniment voisin un axe de points ayant même vitesse relativement au trièdre en M_l et au trièdre en $M_{l'}$.

En effet, dérivons par rapport à l l'expression $\vec{V}+\vec{T}_l\wedge\vec{MX}$ de la vitesse V_X d'un point X lié au trièdre en M_l.

Puisque $\vec{V}$ ne varie pas le long de D

$$\frac{d}{dl}\vec{V}_X=\frac{d}{dl}\vec{T}_l\wedge\overrightarrow{M_l\vec{X}}-\vec{T}_l\wedge\vec{N}\ ;$$

on doit donc avoir

$$\frac{d}{dl}\vec{T}_l\wedge\overrightarrow{M_l\vec{X}}-\vec{T}_l\wedge\vec{N}=0.$$

Pour que cette équation soit celle d'une droite en coordonnées pluckériennes, il faut et il suffit que

$$\frac{d}{dl}\vec{T}_l\,.\,\vec{T}_l\wedge\vec{N}=0\ ;$$

soit

$$(\vec{T},\vec{T}_N,\vec{N})=0.$$

En nous plaçant toujours dans la même hypothèse, nous allons rechercher la courbe de (P) enveloppe de la droite Δ support du tourbillon $\vec{T}_l$ en $\vec{M}_l$, quand le point M_l décrit la droite D.

Rapportons le plan (P) à deux axes orthogonaux Mx et My d'origine le point M et tels que Mx soit perpendiculaire à la direction du vecteur $\vec{T}_N$.

Soient a et a', b et b', 0 et c' les composantes respectives des vecteurs $\vec{N}$, $\vec{T}$, $\vec{T}_N$ sur ces axes.

L'équation de Δ dans le plan (P) est

$$yb-xb'+l\,(b'a-a'b-c'x)+l^2ac'=0$$

En égalant à zéro le discriminant de l'équation du second degré en l ci-dessus, on obtient l'équation de l'enveloppe de Δ :

$$y=\frac{c'}{4ab}x^2+\frac{ab'+a'b}{2ab}x+\frac{(ab'-a'b)^2}{4abc'}$$

Cette équation est celle d'une parabole d'axe Δ.

Cette parabole touche la droite D (d'équation $y=x\frac{a'}{a}$) au point Q d'abscisse

$$x=-\frac{ab'-a'b}{c'},$$

$$=-\frac{|\vec{N}\wedge\vec{T}|}{|K\vec{T}_N|}\ .$$

On a

$$x = -MQ \sin(\vec{N}, \vec{T}_N),$$

$$= -MQ \frac{|\vec{N} \wedge \vec{T}_N K|}{|\vec{T}_N K|},$$

d'où

$$MQ = -\frac{|\vec{N} \wedge \vec{T}|}{|\vec{N} \wedge \vec{T}_N K|},$$

et compte tenu de la relation

$$\vec{T}_N \wedge \vec{N} + R_1 \vec{T} \wedge \vec{N} = 0,$$

on obtient

$$MQ = R_2.$$

Le point Q est donc confondu avec le foyer F_2 de (D) correspondant à la développable de (D) dont la trace sur (S) est la ligne u=Cte qui passe par M. Par suite la congruence (D) des droites D et la congruence des paraboles enveloppes des axes des tourbillons du mouvement ont une surface focale (F_2) commune. Les paraboles admettent pour enveloppes les arêtes de rebroussements (C) des développables u=Cte de la congruence (D) et leurs plans sont confondus avec les plans osculateurs des courbes (C).

On peut s'arranger pour que chacune des paraboles touche (F_2) en son sommet et qu'ainsi son axe coïncide avec la normale à (F_2). Il suffit pour cela que $\vec{N}.\vec{T}_N = 0$, c'est-à-dire que la transformation (N, $\vec{V}$) de (l'image (Σ) de (S) soit à rotation moyenne ω_N nulle.

Pour déterminer un tel mouvement, il suffit donc de recourir au deuxième des deux procédés indiqués précédemment pour la détermination des transformations (M, $\vec{V}$) telles que le vecteur $2\vec{T} \wedge \vec{N}$ soit dirigé suivant une direction principale de la surface qui subit la transformation. On choisira la correspondance entre l'hodographe (S') et la sphère (Σ) de telle manière que la transformation (N, $\vec{V}$) soit à rotation moyenne nulle.

V. - Transformations de (S) en elle même.

32. Soit (M, $\vec{V}$) une transformation infinitésimale quelconque de la surface (S). Projetons orthogonalement $\vec{V}$ sur le plan tangent en M à (S), et faisons tourner cette projection d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$, autour de la normale orientée. On obtient un vecteur $\vec{V}_1$. Considérant la transformation (M, $\vec{V}_1$), calculons sa rotation moyenne ω_1 et sa dilatation superficielle σ_1. on a

$$2\omega_1 = \frac{1}{H}\left[\vec{M}_v . (\vec{N}_u \wedge \vec{V} + \vec{N} \wedge \vec{V}_u) - \vec{M}_u . (\vec{N}_v \wedge \vec{V} + \vec{N} \wedge \vec{V}_v)\right]$$

$$= \frac{1}{H}\left[(\vec{M}_v \wedge \vec{N}_u + \vec{N}_v \wedge \vec{M}_u) . \vec{V} + (\vec{M}_u \wedge \vec{V}_v + \vec{V}_u \wedge \vec{M}_v) . \vec{N}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \vec{N} . \vec{V} + \sigma.$$

De même

$$\sigma_1 = \frac{1}{H}\left[\vec{N}\wedge\vec{M}_u \cdot (\vec{N}_v\wedge\vec{V}+\vec{N}\wedge\vec{V}_v) - \vec{N}\wedge\vec{M}_v \cdot (\vec{N}_u\wedge\vec{V}+\vec{N}\wedge\vec{V}_u)\right],$$

$$= \frac{1}{H}(\vec{M}_u \cdot \vec{V}_v - \vec{M}_v \cdot \vec{V}_u),$$

soit,

$$\sigma_1 = -2\omega.$$

Ces relations peuvent être retrouvées en considérant l'expression bien connue[1] de la dilatation D de l'aire d'une portion S de (S) limitée par un contour C, dans une transformation infinitésimale de (S), de vitesse $\vec{V}$

$$D = \iint \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\vec{V}\cdot\vec{n}\,du\,dv + \int \vec{V}\wedge\vec{n}\cdot d\vec{M}.$$

Si (M, $\vec{V}$) est à rotation moyenne nulle (M, $\vec{V}_1$) est à dilatation superficielle nulle. On peut donc déduire d'une transformation infinitésimale à rotation moyenne nulle quelconque d'une surface (S), une transformation infinitésimale de (S) en elle même telle que la dilatation superficielle soit nulle en chaque point. Réciproquement si l'on a une transformation (M, $\vec{V}$) de ce dernier type, il suffit de faire subir à $\vec{V}$ une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de la normale et d'ajouter au vecteur ainsi obtenu un vecteur parallèle à $\vec{N}$, de module quelconque, pour obtenir une transformation de (S) du premier type.

Supposons que (S) soit une sphère. Si (M, $\vec{V}$) est à rotation moyenne nulle sa congruence associée est normale. Si (M, $\vec{V}_1$) est à dilatation superficielle et composante normale de la vitesse nulles, la congruence associée est une congruence d'APPELL généralisée. On déduit donc de ce qui précède que si on fait tourner de $\frac{\pi}{2}$ les rayons D d'une congruence normale quelconque autour de leurs parallèles menées respectivement par un point arbitraire O, on obtient une congruence d'APPELL généralisée, et que la même construction faite sur une congruence de ce dernier type à partir du point enveloppe du plan moyen donne une congruence de normales. C'est là une proposition bien connue[2].

33. Une propriété dont la vérification est immédiate et à rapprocher de cette établie au paragraphe précédent.

Si, $\vec{V}$ étant dans le plan tangent, on fait tourner sa direction de $\frac{\pi}{2}$ autour de la normale sans changer son module, les directions principales de dilatation linéaires tournent de $\frac{\pi}{4}$, et viennent par suite se

(1) Voir la thèse de M. PAILLOUX.

(2) Voir par ex. P. VINCENSINI-"*Sur une transformation de l'espace réglé et sur les systèmes sphériques isothermes*". Bull. des Sc. Math. 2e série t.LXV, 1941.

confondre avec les anciennes directions principales de rotation.

On peut considérer qu'entre la transformation infinitésimale primitive et celle obtenue après la rotation de la vitesse, il y a échange des directions principales de dilatation et de rotation, de même qu'il y a échange (au signe près pour la dilatation) des scalaires $\frac{\sigma}{2}$ et ω de demi-dilatation superficielle et de rotation moyenne.

Compte tenu de cette remarque, nous nous allons étudier quatre familles (les deux premières sont bien connues) de transformations infinitésimales d'une surface (S) en elle même présentant entre elles des relations intéressantes et qui sont constituées par :

I - Les transformations à rotation moyenne ω nulle.

II - Les transformations à dilatation superficielle nulle,

III - Les transformations pour lesquelles la direction de la vitesse est direction principale de dilatation linéaire.

IV - Les transformations pour lesquelles la direction de la vitesse est direction principale de rotation.

Le problème de la détermination des transformations précédentes peut être résolu complètement. Pour présenter sa solution de façon aussi simple que possible, nous prendrons pour lignes coordonnées sur (S), les courbes intégrales du champ des vitesses (v=Cte) (qui peuvent être choisies arbitrairement) et leurs trajectoires orthogonales (u=Cte). L'opportunité de ce choix est d'ailleurs dictée par la nature même des propriétés des transformations cherchées, qui, comme le montrent les développements précédents assurent un rôle privilégié aux directions des plans tangents perpendiculaires aux vitesses des points de contact.

.34. **Détermination des transformations infinitésimales d'une surface (S) en elle même à rotation moyenne nulle.** Soient x, y les composantes de $\vec{V}$ dans le repère formé dans le plan tangent à (S) par les deux vecteurs $\vec{M}_u$, $\vec{M}_v$.

Exprimons que $\vec{V}.d\vec{M}$ est une différentielle exacte

$$\frac{\partial}{\partial v}(xE+yF)=\frac{\partial}{\partial u}(xF+yG).$$

Avec le choix indiqué pour le système (u, v) on a

$$\frac{\partial}{\partial v}(xE)=0,$$

ou

$$xE=f(u),$$

$f(u)$ étant une fonction arbitraire de u.

Par suite

$$\vec{V}=\frac{f(u)}{E}M_u.$$

35. Détermination des transformations infinitésimales d'une surface en elle même à dilatation superficielle nulle.

Posons

$$\vec{V}=x\vec{M}_u, \qquad (F=0).$$

On a

$$\vec{N}\wedge\vec{M}_u\cdot(x\vec{M}_{uv}+\frac{\partial x}{\partial v}\vec{M}_u)-\vec{N}\wedge\vec{M}_v\cdot(x\vec{M}_{uu}+\frac{\partial x}{\partial u}\vec{M}_u)=0,$$

ou

$$\frac{x}{\sqrt{EG}}(E\vec{M}_v\cdot\vec{M}_{uv}+G\vec{M}_u\cdot\vec{M}_{uu})+\sqrt{EG}\frac{\partial x}{\partial u}=0,$$

soit

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{x}=-\frac{E\frac{\partial G}{\partial u}+G\frac{\partial E}{\partial u}}{2EG}.$$

Par suite

$$\mathrm{Log}\,x=-\mathrm{Log}\sqrt{EG}+\mathrm{Log}\,f(v),$$

$$x=\frac{f(v)}{\sqrt{EG}},$$

$$\vec{V}=\frac{f(v)}{\sqrt{EG}}\vec{M}_u, \qquad (F=0).$$

Calculons $\vec{N}\wedge\vec{V}$:

$$\vec{N}\wedge\vec{V}=\frac{f(v)}{G}\vec{M}_v.$$

D'après le paragraphe précédent $\vec{N}\wedge\vec{V}$ est la vitesse d'une transformation de (S) à rotation moyenne nulle. On retrouve bien le résultat énoncé au n° 32.

36. Détermination des transformations infinitésimales pour lesquelles la direction de la vitesse est direction principale de dilatation linéaire.

Posons encore

$$\vec{V}=x\vec{M}_u, \qquad (F=0).$$

Les transformations cherchées doivent vérifier la relation

$$\vec{M}_v\cdot\vec{V}_u+\vec{M}_u\cdot\vec{V}_v=0,$$

qui exprime la persistance, dans la transformation, de l'orthogonalité du réseau formé par les lignes intégrales du champ des vitesses et leurs trajectoires orthogonales.

On a

$$x\vec{M}_v \cdot \vec{M}_{uu} + x\vec{M}_u \cdot \vec{M}_{uv} + E\frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Les deux premiers termes étant égaux à

$$\frac{\partial F}{\partial u}x = 0,$$

il reste

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

soit

$$x = f(u),$$

et

$$\vec{V} = f(u)\vec{M}_u, \quad (F=0).$$

37. Détermination des transformations infinitésimales pour lesquelles la direction de la vitesse est direction principale de rotation.

$$\vec{V} = x\vec{M}_u, \qquad (F=0).$$

Il faut et il suffit que l'on ait

$$\vec{N}\wedge\vec{M}_u \cdot \vec{V}_v + \vec{N}\wedge\vec{M}_v \cdot \vec{V}_u = 0,$$

soit

$$x\vec{N}\wedge\vec{M}_u \cdot \vec{M}_{uv} + \frac{\partial x}{\partial v}\vec{N}\wedge\vec{M}_u \cdot \vec{M}_u + x\vec{N}\wedge\vec{M}_v \cdot \vec{M}_{uu} + \frac{\partial x}{\partial u}\vec{N}\wedge\vec{M}_v \cdot \vec{M}_u = 0,$$

ou

$$\frac{x}{\sqrt{EG}}(E\vec{M}_v \cdot \vec{M}_{uv} - G\vec{M}_u \cdot \vec{M}_{uu}) - \sqrt{EG}\frac{\partial x}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{x} = \frac{1}{2}\frac{E\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial u}}{EG},$$

d'où

$$x = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}f(v),$$

$$\vec{V} = f(v)\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\vec{M}_u, \qquad (F=0).$$

Calculons $\vec{N}\wedge\vec{V}$:

$$\vec{N}\wedge\vec{V} = f(v)\vec{M}_v.$$

$\vec{N}\wedge\vec{V}$ est donc bien la vitesse d'une transformation du type étudié au paragraphe précédent. On retrouve la proposition du n° 33.

38. Dans toute la suite, et sauf indication contraire, le vecteur $\vec{V}$ sera porté par la tangente en M à la courbe v = Cte du système (u, v) de (S), supposé orthogonal. m désignant le module de la vitesse dans les quatre types de transformations infinitésimales de (S) en elle même précédemment envisagées (que nous désignerons par I, II, III, IV), on aura alors pour chacun d'eux :

Type I - Transformations à rotation moyenne nulle :

$$m = \frac{f(u)}{\sqrt{E}}$$

Type II - Transformations à dilatation superficielle nulle :

$$m = \frac{f(v)}{\sqrt{G}}$$

Type III - Transformations pour lesquelles la vitesse est direction principale de dilatation :

$$m = \sqrt{E} f(u)$$

Type IV - Transformations pour lesquelles la vitesse est direction principale de rotation :

$$m = \sqrt{G} f(v)$$

Nous allons maintenant examiner les conditions pour qu'une transformation appartienne à la fois à deux quelconques des types précédents. Ces conditions se traduisent par des propriétés géométriques du système coordonné (u, v) qu'il est intéressant de mettre en évidence, ce que nous allons faire en envisageant successivement tous les cas, au nombre de six, qui peuvent se présenter.

39. **Transformations du type I - II.** Pour qu'une transformation infinitésimale de (S) en elle même appartienne à la fois aux types I et II, il faut et il suffit, conformément au n° 38, que l'on ait

$$\frac{f(u)}{\sqrt{E}} = \frac{g(v)}{\sqrt{G}} \tag{1}$$

le module m du vecteur vitesse (qui peut être tangent à l'une ou à l'autre des courbes u, v) dans la transformation envisagée de (S), étant égal à la valeur commune des deux rapports précédents.

L'égalité (1), qui peut s'écrire

$$\frac{G}{E} = P(u)Q(v),$$

exprime comme l'on sait que (u, v) est un système orthogonal isotherme quelconque de (S).

En remplaçant u et v par des fonctions convenables de u et v respectivement, on peut donner au ds^2 de (S) la forme isométrique

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2),$$

$f(u)$ et $g(v)$ étant réduits à l'unité. Les courbes coordonnées obtenues en faisant croître u et v par degrés infinitésimaux égaux partagent alors (S) en carrés infinitésimaux et l'expression

$$m = \frac{1}{\sqrt{E}}$$

du module de la vitesse définissant la transformation infinitésimale de (S) en elle même montre que, dans cette transformation, les différents sommets du quadrillage ainsi obtenu décrivent des segments inversement proportionnels aux côtés des carrés correspondants.

40. **Transformations du type III - IV .** Les directions principales de dilatation et de rotation étant confondues, la transformation envisagée est nécessairement conforme.

On a ici

$$\sqrt{E} f(u) = \sqrt{G} g(v) = m,$$

soit

$$\frac{E}{G} = P(u)Q(v).$$

Les courbes intégrales (v = Cte) du champ des vecteurs vitesses forment ici aussi, avec leurs trajectoires orthogonales (u = Cte) un système orthogonal isotherme. Mais dans le quadrillage obtenu à partir de la forme isométrique

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2)$$

du ds^2 de (S), en faisant croître u et v par degrés infinitésimaux égaux ce sont les carrés des côtés eux mêmes (et non leurs inverses comme dans le cas précédent) qui représentent les déplacements infinitésimaux subis par les différents sommets.

41. **Transformations du type I - III .**

La condition est ici

$$\frac{f(u)}{\sqrt{E}} = \sqrt{E} g(u) = m.$$

E doit donc être fonction de u seul. Les courbes v = Cte doivent donc constituer une famille de géodésiques de (S), et m doit être une fonction quelconque de u, ou ce qui revient au même, de l'arc des géodésiques v = Cte compté à partir d'une trajectoire orthogonale fixe de ces géodésiques.

En envisageant sur (S) la famille de lignes géodésiques la plus générale et en prenant pour vecteurs vitesses d'une transformation infinitésimale de (S), des vecteurs tangents aux courbes de cette famille, ayant pour module une fonction arbitrairement choisie de la distance géodésique du point de contact à une trajectoire orthogonale fixe des géodésiques, on obtient la transformation infinitésimale de (S) en elle même la plus générale, à dilatation superficielle nulle admettant les directions des vecteurs comme directions principales de dilatation.

42. Transformations du type II - IV .

La condition est ici

$$\frac{f(v)}{\sqrt{G}} = \sqrt{G}g(v) = m .$$

G est donc une fonction de la seule variable v ; les courbes u = Cte sont des géodésiques de (S) et m est une fonction arbitraire de la distance géodésique du point courant M de (S) à une courbe v = Cte fixe. Les vecteurs vitesses des différentes transformations infinitésimales du type actuellement envisagé sont donc tangents à une famille quelconque (ϕ) de courbes géodésiquement parallèles de (S), le module du vecteur relatif au point courant M de (S) étant une fonction arbitrairement choisie de la distance géodésique du point M à une courbe quelconque la famille (ϕ).

On peut noter que les déformations infinitésimales d'une surface (S) (nécessairement applicables sur une surface de révolution) en elle même, appartiennent au type actuellement envisagé. Ces transformations en tant que déformations, sont à dilatation superficielle nulle et toute direction du plan tangent en un point quelconque M de (S), donc celle de la vitesse de M, est direction principale de rotation. Pour ces transformations infinitésimales particulières, les propriétés caractéristiques des transformations générales du type (II - IV) précédemment énoncées sont bien connues et résultent d'ailleurs aussitôt de l'application de (S) sur l'une quelconque de ses déformées de révolution.

43. Transformations du type I - IV .

Pour ces transformations on a

$$\frac{f(u)}{\sqrt{E}} = \sqrt{G}g(v) = m .$$

Le produit EG est donc de la forme

$$EG = P(u)Q(v) .$$

Moyennant un changement convenable sur les paramètres u et v respectivement, le ds^2 de la surface (S) envisagée peut être mis sous la forme

$$ds^2 = \frac{1}{m^2}du^2 + m^2\,dv^2$$

Le problème de la détermination des transformations infinitésimales d'une surface en elle même du type (I - IV) est ainsi ramené à celui de la mise de son élément linéaire sous la forme précédente, m étant une certaine fonction de u et v. Ce dernier problème est possible pour toute surface (S), et cela d'une infinité de façons, sa solution générale dépendant de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du 2ème ordre.

Chacune de ses solutions fournit d'ailleurs deux transformations infinitésimales de (S) en elle même du type considéré ; l'une pour laquelle les déplacements infinitésimaux sont portés par les courbes v = Cte, les modules des vecteurs vitesse correspondant ayant pour valeur m, l'autre pour laquelle ces déplacements sont portés par les courbes u = Cte, m étant remplacé par $\frac{1}{m}$

Les transformations infinitésimales ainsi obtenues peuvent être interprétées géométriquement de la manière suivante :
Le ds^2 de (S) étant mis sous la forme indiquée, faisons croître u et v par degrés infinitésimaux égaux. Nous partageons ainsi (S) en rectangles infinitésimaux de même aire, et les deux transformations infinitésimales relatives au ds^2 envisagé dont il a été question plus haut, ont pour effet de déplacer chaque sommet du quadrillage obtenu dans la direction de l'un des côtés du rectangle correspondant, l'amplitude du déplacement étant égale (ou proportionnelle) à la longueur de l'autre côté.

44. Transformations du type II - III .

On doit avoir ici

$$\frac{f(v)}{\sqrt{G}} = \sqrt{E}\,g(u) = m$$

La comparaison de ces équations avec celles relatives au type (I - IV) montre aussitôt que l'on passe de la solution du problème (I - IV) à celle du problème (II - III) en conservant les lignes intégrales du champ des vecteurs vitesse et en remplaçant les modules de ces vecteurs par leurs inverses.

Ici, les déplacements des sommets des quadrillages par rectangles infinitésimaux de même aire définis au paragraphe précédent, ont pour amplitudes les longueurs mêmes des côtés des rectangles suivant lesquels ces points se déplacent.

BIBLIOGRAPHIE

BOREL (F.) - Sur certaines propriétés invariantes par déformation des congruences de droites, de cercles ou de sphères (Thèse - Paris, 1960).

BOULIGAND (G.) - Les Principes de l'Analyse géométrique - Tome I (Paris, 1949).

BURALI-FORTI - Gradiente, rotazione e divergenzia in una superficie (Atti Delle R. Accademia Delle Scienze di Torino, tome XLV, 1909-1910).

DARBOUX (G.) - Leçons sur la Théorie générale des surfaces - IV^{e} partie (Paris, 1946).

FAVARD (J.) - Cours de géométrie différentielle locale (Paris, 1957).

PAILLOUX (H.) - Contribution à l'étude des systèmes déformables (Thèse - Paris, 1937).

- Mouvements Fluides entraînant une famille de surfaces inextensibles (Bulletin des Sciences mathématiques, 1939 - p. 329-353).

VINCENSINI (P.) - Sur trois types de congruences rectilignes (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1927).

- Sur les congruences rectilignes à enveloppée moyenne donnée (même recueil, 1929).

- Propagations d'aires invariantes (même recueil, 1933).

- Sur une transformation de l'espace réglé et sur les systèmes sphériques isothermes (Bull. sc. Math., 2ème série, T. XLV, 1941, 1ère partie, p. 155-186).

- Sur une relation entre les congruences isotropes et les congruences d'Appell (même recueil, T. LXIX, 1945, 1ère partie, p. 52-62).

- Sur une transformation des congruences les unes par les autres (même recueil, T. LXX, 1946, 1ère partie, p. 183-199).

- Sur une transformation des champs de vecteurs, unitaires (Comp. Rend. Séances Ac. Sc., T. 226, 1948, p. 1163-1165).

Deuxième THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

APPLICATIONS CINEMATIQUES DU CALCUL TENSORIEL

Vu et approuvé
Marseille, le 3 Mai 1961
Le Doyen
signé : P. ROUARD

Vu et permis d'imprimer
Aix-en-Provence, le 10 Mai 1961
Le Recteur
signé : J. BLACHE

Édité et imprimé par :
L'IMPRIMERIE DES CÉLESTINS
6, QUAI DES CÉLESTINS - PARIS 4e
Tél. : ARC. 38-27
Dépôt légal 501 - 6-61 - 300